



DELHI UNIVERSITY
LIBRARY

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. 86:2 168N37
Ac. No. 27060 17 1 Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of 5 Paise will be collected for each day the book is kept overtime.



سلسلہء کتابت اسلامیہ جامعہ عثمانیہ

علم ہندو نظری

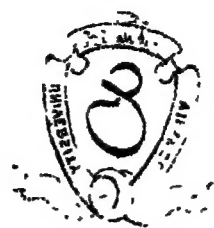
تالیف
ای۔ ایچ۔ ایسکوٹھ، ڈی۔ ڈی
ترجمہ

محمد نذیر الدین، ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتہ تالیف ترجمہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۵۶ھ ۱۳۲۶ھ ۱۹۳۴ھ

طبع و اشاعت دارالکتاب اسلامیہ لاہور



فہرستِ مضمین

علمِ ہست و نظری

پہلا باب
ثالثت کے بعض خواص

تعریفات
مرکز عمودی
نقطہ قطبی دائرہ
خط پایمین
خطوط وسطی

دوسرا باب
دائرہ کے بعض خواص

قطب اور قطبی
مزدوج نقطے اور خطوط
بنیادی محور
ہم محور دائرے

۱۰
۹
۸
۷
۶
۵
۴
۳
۲
۱

۱۹
۲۲
۲۵
۲۸

۳۱

دو دائروں کے مشترک مماس

تیسرا باب

علامتوں کا استعمال نقطوں کا ہم خط اور خطوں کا ہم نقطہ ہونا

۴۰

خطوں، رقبوں، زاویوں کی علامتیں

۴۵

منیڈاس اور سیوا کے مسئلے

۵۲

متساوی الزاویہ مزدوج

۵۳

شعبہ سطحی

چوتھا باب

تظلیل

۵۸

عام اصول

۵۹

زاویوں کو دی ہوئی مقدار کے زاویوں میں منظر کرنا

۶۳

تین نقطوں کی ایک سمت کسی دوسرے تین نقطوں میں منظر ہو سکتی ہے

پانچواں باب

چلیبی نسبتیں

۶۷

تعریف

۶۸

چلیبی نسبتیں چھ میں تحویل پذیر ہیں

۷۱

چلیبی نسبتوں کی ظنی خاصیت

۷۷

ہم رسم سمتیں اور شبلیں باہم منظر ہو سکتی ہیں

چھٹا باب

منظرہ

۸۲

۸۴

۸۷

۹۱

تعریف
سقتیں اور پینلین منظرہ میں
ہم رسم سقتیں اور پینلین
شکلات منظرہ میں

ساتواں باب

موسیقی تراش

۱۰۱

۱۰۶

۱۰۸

موسیقی سحتوں کی تعریف اور خواص
دائرہ کی موسیقی خاصیت قطب اور قطبی کی
چار زاویائی اور ذواربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت

آٹھواں باب

درہنج

۱۱۵

۱۲۰

۱۲۲

۱۲۴

۱۲۵

درہنج سعت کی تعریف اور جانچ
درہنج سعت منطلل ہو سکتی ہے
دائرہ کے درہنج خواص
قائم پینل درہنج میں
ہر درہنج پینل میں علی القوائم شعاعوں کا زوج ہوتا ہے

نواں باب

مخروطی تراشیں

۱۳۰

تعریفات

۱۳۲	ماسکہ اور مرتب
۱۳۳	ظلی خواص
۱۳۴	دائرہ فی تطلیل دوسرے دائرہ میں
۱۳۶	ماسکہ اور مرتب کا قطب اور قطبی ہونا
۱۳۸	مقدار زیادہ تر
۱۴۰	ماسکہ اور مرتب کی خاصیت کا ثبوت
۱۴۱	(۱) مکانی
۱۴۶	(۲) ناقص
۱۴۹	(۳) زائد
۱۵۴	قطر اور سین

دسواں باب

تمام مخروطیوں کے مشترک خواص

۱۵۷	دو تراور عاں کا مرتب کے ساتھ تقاطع
۱۶۰	منحنی جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے ایک دائرہ کا ظل ہوتا ہے
۱۶۱	ماسوں کا زوج
۱۶۴	عماد
۱۶۵	وتر خاص
۱۶۹	کارنو کا مسئلہ
۱۷۰	نیوٹن کا مسئلہ
۱۷۲	چند اطلاقات
۱۷۶	دائرہ انحناء
۱۷۷	خزوطی جو چار زاوئی کے چار نقطوں میں سے گزرتا ہے

گیارہواں باب قطع مکانی

۱۸۴	ابتدائی خواص
۱۸۶	ماس اور عماد
۱۹۰	ماسوں کا زوج
۱۹۳	مکانی جو ایک مثلث کے اضلاع کو مس کرتا ہے
۱۹۹	قطر
۲۰۱	دائرہ انحناء

بارہواں باب قطع ناقص

۲۱۲	ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل
۲۱۳	ماس اور عماد
۲۲۰	ماسوں کا زوج
۲۲۱	محربہ متباعدہ
۲۲۲	مزدوج قطر
۲۲۵	اساوی دائرہ
۲۲۹	ساوی مزدوج قطر
۲۳۲	دائرہ انحناء

تیرہواں باب قطع زائد

۲۴۰

منہجی کی شکل
ماسکی فاصلوں کا فرق مستقل

۲۴۱

۲۴۲

۲۴۵

۲۴۶

۲۴۸

۲۴۹

۲۵۱

۲۵۵

۲۷۲

ماس اور عماد

مزدوج محور کا طول

ماسوں کا زوج

مرتب دائرہ

مزدوج قطع زائد

متقاربی خواص

مزدوج قطر

دائرہ انحناء

چودہواں باب قائم زائد

۲۷۹

۲۸۰

۲۸۲

۲۸۵

مزدوج قطر

عمودی قطر

قائم زائد جو ایک مثلث کے گرد کھینچا جائے

وتر اور ماس کے خواص

پندرہواں باب قائم تطیل

۲۹۱

۲۹۲

۲۹۶

اصول

بنیادی مسئلے

قطع ناقص ایک دائرہ کا قائم ظل ہوتا ہے

سولہواں باب محروٹیوں کے چلیپہ نسبتی خواص

۳۰۳	ن (۲ ب ج د) مستقل
۳۰۸	پیا سکال کا مسئلہ
۳۱۰	بریا نکان کا مسئلہ
۳۱۰	چار نقطوں میں سے گزرنے والے محروٹیوں کے مرکوزوں کا طریق
۳۱۲	دریچ پنل محروٹی پر

سترہواں باب مکافات

۳۱۶	اصول
۳۲۱	چار زاوی اور چار ضلعی کے دریچ خواص
۳۲۵	ڈیسارگ کا مسئلہ اور اس کا متکافی مسئلہ
۳۲۶	مکافات کا اطلاق محروٹیوں پر
۳۳۳	خاص صورت جبکہ اساسی محروٹی ایک دائرہ ہو
۳۳۵	ہم محور دائروں کی مکافات ہم ماسکی محروٹیوں میں
۳۳۷	خود مزدوج مثلثوں کا زوج
۳۳۹	متکافی مثلث

اٹھارواں باب دائری نقطے - محروٹیوں کے ماسکے

۳۴۴

دائرہ نقطوں کی تعریف

۳۴۵

تخیلی نقطہ نظر سے

۳۴۷

دائرہ نقطوں کے استعمال سے مخروطیوں کے خواص حاصل کرنا

۳۵۰

مخروطیوں کے چار ما سکے

۳۵۲

دو مثلث جو ایک مخروطی کے گرد کھینچے جائیں

۳۵۴

نظر کے ذریعہ تقسیم کرنا

انیسواں باب

انقلاب

۳۶۳

خط اور دائرہ کا انقلاب

۳۶۶

کرہ کا انقلاب

۳۶۷

مقلوب نقطوں کو مقلوب نقطوں میں مقلوب کرنا

۳۷۱

نویرباخ کا مسئلہ

بیسواں باب

اشکال کی مشابہت

۳۷۹

ہم وضع اشکال

۳۸۳

شکلیں جو راست مشابہ ہیں لیکن ہم وضع نہیں ہیں

۳۸۵

دو دائروں کے لیے مشابہت کا دائرہ

۳۸۵

بالعکس مشابہ اشکال

۳۹۱

متفرق مثالیں

۴۰۶

اشارہ

(۱)

علم ہندو نظری

پہلا باب

مثلث کے بعض خواص

۱۔ اصطلاحات کی تعریف۔

(۱) خطوں سے خطوط مستقیم مراد ہوں گے **الّا** انکے اس کے خلاف بیان کیا گیا ہو۔

(ب) وہ خطوط جو مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع کے وسطی

نقطوں تک کھینچے جائیں مثلث کے خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔

(ج) ایک مثلث کے حاطہ دائرہ سے مراد وہ دائرہ ہے

جو اس کے راسوں میں سے گزرتا ہے۔
اس دائرہ کے مرکز کو ہم مثلث کا حاطہ مرکز کہینگے۔

طالب علم اس سے واقف ہوگا کہ حائط مرکز ان عمودوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے جو مثلث کے ضلعوں پر ان کے نقاط وسطیٰ میں سے کھینچے گئے ہوں۔
(د) ایک مثلث کا اندرونی دائرہ وہ دائرہ ہے جو مثلث کے ضلعوں کو مس کرے اور اس کے اندر واقع ہو۔

اس دائرہ کے مرکز کو ہم اندرونی مرکز کہیں گے۔
اندرونی مرکز ان خطوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے جو مثلث کے زاویوں کی تقصیف کرتے ہیں۔

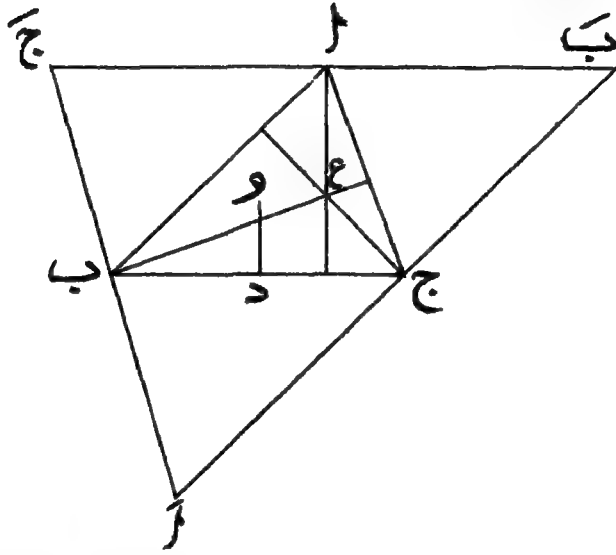
(۴) ایک مثلث کا جانبی دائرہ وہ دائرہ ہے جو مثلث کے ایک ضلع کو اندر اور باقی دو ضلعوں کو خارج کرنے پر مس کرے۔ ہر مثلث کے تین جانبی دائرے ہوتے ہیں۔

جانبی دائرہ کے مرکز کو ہم جاتی مرکز کہیں گے۔
جانبی مرکز، ایک زاویہ کے ناصف اور دوسرے دو خارجی زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے۔

(د) دو مثلث جو ایسے ہوں کہ ایک کے ضلع اور زاویے علی الترتیب دوسرے کے ضلعوں اور زاویوں کے مساوی ہوں مائل کہلا سکتے ہیں۔
اگر ΔABC ، ΔDEF کے مائل ہو تو ہم اس واقعہ کو برقیہ $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ کے ذریعہ ظاہر کریں گے۔

۲۔ مسئلہ۔ ایک مثلث کے راسوں سے مقابل کے اضلاع پر عمود ڈالے جائیں تو وہ ایک نقطہ پر جسکو مرکز عمودی کہتے ہیں ملتے ہیں اور مرکز عمودی سے ہر راس کا فاصلہ اس عمودی فاصلہ کا

دو چند ہوتا ہے جو اس راس کے مقابل کے ضلع سے مائٹ مرکز کا ہے۔



مثلث ΔABC کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع کے متوازی خطوط کھینچو۔ مثلث ΔABC جو اس طور پر بنے گا مثلث ΔABC کے مشابہ ہوگا اور اس کے خطی ابعاد ابتدائی مثلث کے خطی ابعاد سے دو چند ہوں گے۔

اس کے علاوہ نقاط A, B, C چونکہ ΔABC کے ضلعوں وسطی نقطے ہیں اسلئے ان نقطوں سے ان ضلعوں پر کے عمود جن میں یہ نقطے واقع ہیں ΔABC کے مائٹ مرکز پر ملیں گے۔

لیکن یہ عمود مثلث ΔABC کے ضلعوں پر بھی عمود ہیں پس ہمارے مسئلہ کا پہلا جزو ثابت ہو گیا۔

(9) اب فرض کرو کہ ΔABC کا مرکز عمودی E ہے اور مائٹ مرکز O وہ ΔABC پر عمود کھینچو۔

اب چونکہ مثلث اَب ج کا حاطہ مرکز بھی ع ہے اسلئے
ع ا اور و د متشابه مثلثوں اَب ج اور اَب ج میں
تغییری خطوط ہیں۔ اس لئے ا ع و د کا دو چند ہے۔

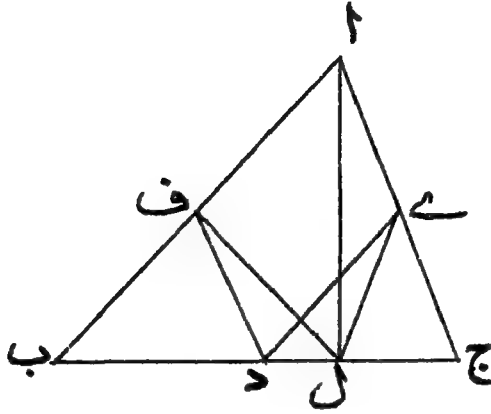
۳۔ تعریف۔ اُن عمودوں کو جو ایک مثلث کے راسوں
سے ان کے مقابل کے اضلاع پر کھینچے گئے ہوں مثلث کے عمود
اور اُن عمودوں کو جو حاطہ مرکز سے ضلعوں پر کھینچے گئے ہوں حاطہ
مرکز سے عمود کہنا سہولت بخش ہوگا۔

۴۔ مسئلہ۔ وہ دائرہ جو ایک مثلث کے ضلعوں کے
وسطی نقطوں میں سے گزرتا ہے مثلث کے عمودوں کے
پائین میں سے اور ان تین خطوں کے وسطی نقطوں میں
سے بھی گزرتا ہے جو مرکز عمودی کو مثلث کے راسوں سے
ملاتے ہیں۔

قرین کرو کہ مثلث اَب ج کے ضلعوں کے وسطی نقطے د،
ے، ف، اس کے عمودوں کے پائین ل، ہ، ن ہیں، حاطہ
مرکز و ہے اور مرکز عمودی ع۔
ف د دے، ف ل لے کو بلاؤ۔

اب چونکہ ا ل ج کا حاطہ مرکز ہے اس لئے

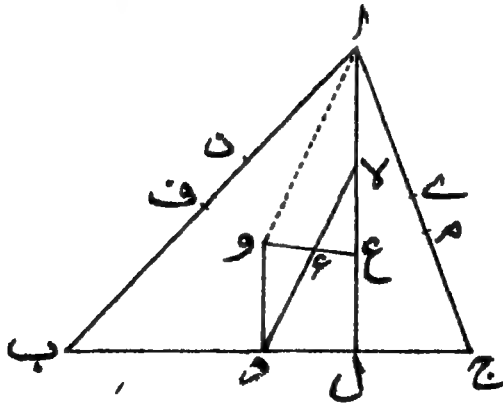
$$دے ل = دے ا ل$$



(4)

اسی طرح

$\angle FAL = \angle FAL$
 $\angle FAL = \angle FAL$
 $\angle FAL = \angle FAL$
 متوازی الاضلاع ہے۔ اس لئے نقطہ ل مثلث دے ف
 کے مانگ دائرہ پرواقع ہے۔
 اسی طرح ہر اور بی ایس دائرہ پرواقع ہیں۔



نیز اس دائرہ کا مرکز ان تین خطوں میں سے ہر ایک پرواقع ہے

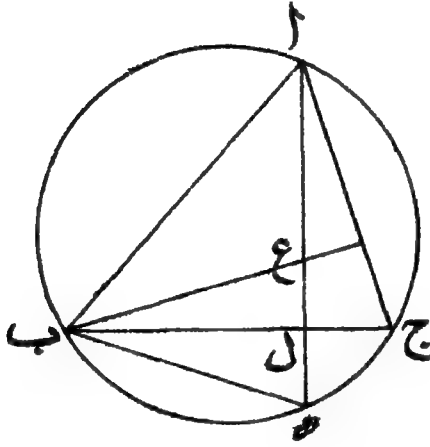
جود ل' م' ف' ن' کی علی القوائم تنصیف کرتے ہیں۔
 اس لئے اس دائرہ کا مرکز 'و' کے وسطی نقطہ 'ع' پر ہے۔
 اب د' کو ملاؤ اور اسے خارج کرو تا کہ وہ 'ا' 'ع' سے لا پر ملے
 یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلثات 'و' 'ع' 'د' 'ع' 'ا' 'ع' 'لا'
 مثل ہیں اس لئے

$د = ع = لا$ اور $لا = ع = و$
 اس لئے 'ا' اس دائرہ پر واقع ہے جود 'ے' 'ف' 'ل'،
 م' 'ن' میں سے گذرتا ہے۔
 اور چونکہ $لا = ع = و = د = ا$ اس لئے 'ا' 'ع' کا
 وسطی نقطہ ہے۔
 اسی طرح دائرہ 'ب' ہا اور 'ے' میں سے گذرتا ہے جو ب' 'ع'
 اور ج' 'ع' کے وسطی نقطے ہیں۔
 پس ہمارا مسئلہ ثابت ہو گیا۔

۵۔ وہ دائرہ جس کی تعریف اوپر کی گئی ہے مثلث کا نو نقطی
 دائرہ کہلاتا ہے۔ اسکا نصف قطر حائط دائرہ کے نصف قطر کا آدھا
 ہوتا ہے۔ یہ اس طرح ظاہر ہے کہ نو نقطی دائرہ مثلث د' 'ے' 'ف'
 کا حائط دائرہ ہے اور خود مثلث د' 'ے' 'ف' مثلث 'ا' 'ب' 'ج'
 کے مشابہ ہے اور اس کے ابعاد موخر الذکر مثلث کے ابعاد کے
 نصف ہیں۔ یہی بات شکل سے بھی ثابت ہو سکتی ہے جس میں د' 'لا'
 = و' 'ا' کیونکہ و' د' 'لا' ایک متوازی الاضلاع ہے۔ (5)

انقلاب کے بیان میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ نو نقطی دائرہ
 مثلث کے اندرونی دائرہ کو اور تین جانبی دائروں کو مس کرتا ہے۔
 ۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث 'ا' 'ب' 'ج' کے عمود

ا ل کو خارج کیا جائے اور وہ حائط دائرہ سے ھ میں ملے تو
 ع ل = ل ھ جہاں ع مرکز عمودی ہے۔



ب ھ کو ملاؤ۔ تب
 ل ھ ب ل = ل ھ ا ج ایک ہی قطعہ دائرہ
 میں واقع ہیں۔
 = ل ب ع کیونکہ ہر ایک زاویہ
 ا ج ب کا منہم ہے۔

پس مثلثات ع ب ل، ھ ب ل میں ب پر کے زاوئے
 مساوی ہیں اور نیز ل پر ان کے زاوئے قائمہ ہیں اور ضلع ب ل
 مشترک ہے، اس لئے

$$ع ل = ل ھ$$

۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ
 کے کسی نقطہ ق سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں

تو ان کے پائین ہم خط ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ جس طرح شکل میں دیا گیا ہے ان عمودوں کے پائیں سر، س، ت ہیں۔ ق ا اور ق ب کو ملاؤ۔
 قات اس ایک دائری چار ضلعی ہے کیونکہ ت اور س قائمہ زاوے ہیں۔

(۴)

∴ $\angle اس = \angle اق$ س

$\angle ق اس$ کا متتام
 $\angle ق ب ج$ کا متتام (کیونکہ ق ج)

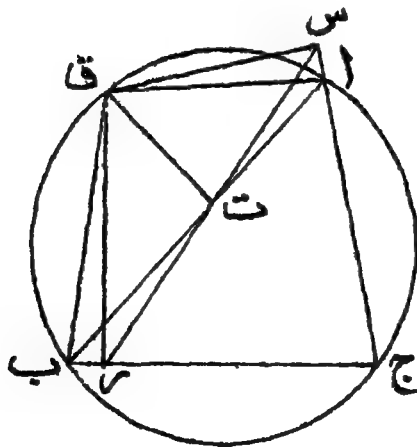
ق ب ج (شکلہ ہوا)

$\angle باق$ س

$\angle بات$ س (کیونکہ

ق ب سات دائری ہے)

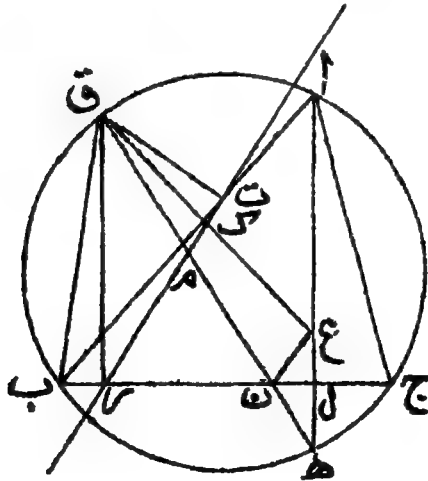
∴ سات س ایک خط مستقیم ہے۔



اس خط برات س کو ق کا خط پائین کہتے ہیں۔ یہ سمن خط کے نام سے بھی مشہور ہے۔
 اس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے۔ یعنی
 اگر ایک نقطہ ق سے ایک مثلث کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے جائیں انکے پائین ہم خط ہوں تو ق مثلث کے حائط دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

کیونکہ ق برات اور قات اس دائری ہونے کی وجہ سے
 $\angle بقا = \angle برا = \angle بات = \angle اتس = \angle اقس$
 $\angle قبا = \angle قاس$

ق با ج دائری ہے۔
 ۸۔ مسئلہ۔ ق کا خط پائین اس خط کی تضعیف کرتا ہے (۷)
 جو ق اور مرکز عمودی ع کو ملاتا ہے۔



ق ع کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ ق کے خط پائین کو گ پر قطع کرتا ہے۔
فرض کرو کہ عمود ال حائط دائرہ سے ہر پر ملتا ہے۔
ق ع کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ خط خط پائین کو مہر پر اور ب ج کو
ن پر قطع کرتا ہے۔

ع ن اور ق ب کو ملاؤ۔

اب چونکہ ق ب سرات دائری ہے اس لئے

ق ب سرات = ق ب ت

= ق ب ا ایک ہی قطعہ دائرہ میں ہیں

= ق ب سرات کیونکہ ق ب ا کے

متوازی ہے۔

ق م = م سرات

نقطة م خط ق ن کا نقطہ وسطی ہے۔

لیکن ع ن ل = ل ن ہ کیونکہ ع ن ل =

م م ن ل

= م سرات م

= م سرات

∴ ع ن خط سرات کے متوازی ہے

∴ ق ت : ک ع = ق م : م ن

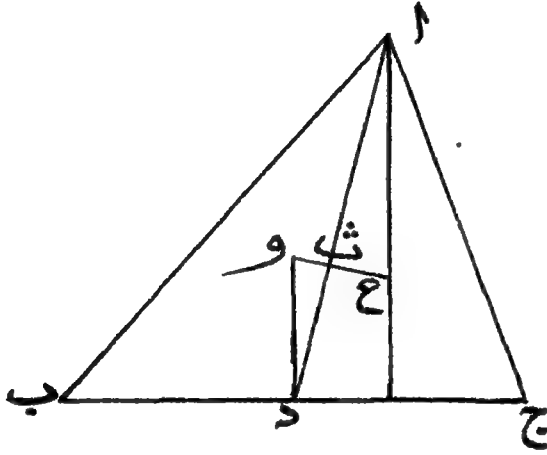
∴ ق ک = ک ع

۹۔ مسئلہ۔ ایک مثلث کے تینوں خطوط وسطی

ایک نقطہ میں ملتے ہیں اور یہ نقطہ ہر خط وسطی کا نقطہ تثلیث

ہوتا ہے اور نیز اس خط کا بھی نقطہ تثلیث ہوتا ہے جو حائط

مرکز و اور مرکز عمودی ع کو ملاتا ہے۔



فرض کرو کہ مثلث ABC کا خط وسطی AD، و ع کوٹ پر قطع کرتا ہے۔ اب چونکہ مثلث ADE اور BDE متشابه ہیں اور $AD = DE$ اس لئے $\angle ADE = \angle BDE$ اور $\angle ADE = \angle BDE$ ۔

پس خط وسطی AD، و ع کوٹ پر قطع کرتا ہے جو دونوں خطوں کا نقطہ تثلیث ہے۔

اسی طرح دوسرے خط وسطی و ع کو اسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں اور یہ نقطہ ان کا بھی نقطہ تثلیث ہے۔ اس نقطہ D کو ہم مثلث کا نقطہ وسطی کہینگے۔ طالب علم غالباً اس نقطہ سے مثلث کے مرکز ہندسی کے طور پر واقف ہوگا۔

۱۔ مسئلہ۔ اگر مثلث ABC کا ایک خط وسطی

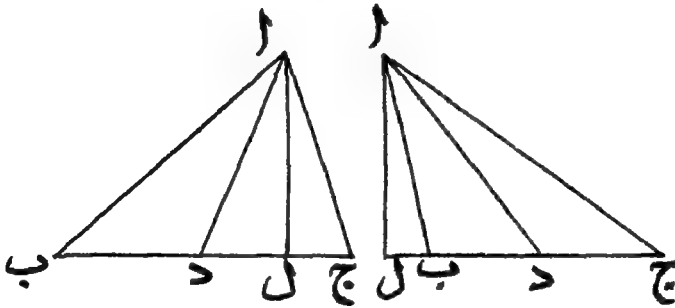
AD ہو تو

$$اب' + اج' = ۲ اد' + ۲ دب' \\ \text{ال' } اب' \text{ ج پر عمود کھینچو۔ اب}$$

$$اج' = اب' + بج' - ۲ بج \times بل$$

$$\text{اور } اد' = اب' + بد' - ۲ بد \times بل$$

ان مساواتوں میں وہ صورتیں داخل ہیں جنہیں اب اور ج دونوں زاوے حادہ ہیں اور نیز وہ صورتیں بھی جنہیں ان زاویوں میں سے ایک مثلاً ب منفرج ہے بشرطیکہ ب ج اور ب ل کی علامتیں ایک یا مخالف لی جائیں بموجب اس کے کہ وہ ایک ہی یا مخالف سمتوں میں ہوں۔ (9)



دوسری مساوات کو ۲ سے ضرب دو اور پہلی مساوات میں سے تفریق کرو تو

$$اج' - ۲ اد' = بج' - اب' - ۲ دب'$$

$$اب' + اج' = ۲ اد' + بج' - ۲ دب'$$

$$= ۲ اد' + ۲ دب' \text{ کیونکہ بج' = دب'}$$

$$۲ دب'$$

۱۱۔ گذشتہ دفعہ میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے وہ حسب ذیل عام مسئلہ کی صرف ایک خاص صورت ہے۔
اگر ایک مثلث Δ ب ج کے ضلع ب ج میں د ایک ایسا نقطہ ہو کہ $\Delta = \frac{1}{n} \Delta$ ب ج تو

(ن-۱) Δ ب + Δ ج = $n \times \Delta$ د + $(1 - \frac{1}{n}) \Delta$ ب ج
کیونکہ حسب سابق عمل کرنے اور دوسری مساوات کو ۲ کی بجائے ن سے ضرب دیکر پہلی مساوات میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

Δ ج - $n \times \Delta$ د = $(1 - \frac{1}{n}) \Delta$ ب + Δ ج - $n \times \Delta$ د
∴ (ن-۱) Δ ب + Δ ج = $n \times \Delta$ د + Δ ب ج - $n \times \Delta$ د
= $n \times \Delta$ د + $(1 - \frac{1}{n}) \Delta$ ب ج

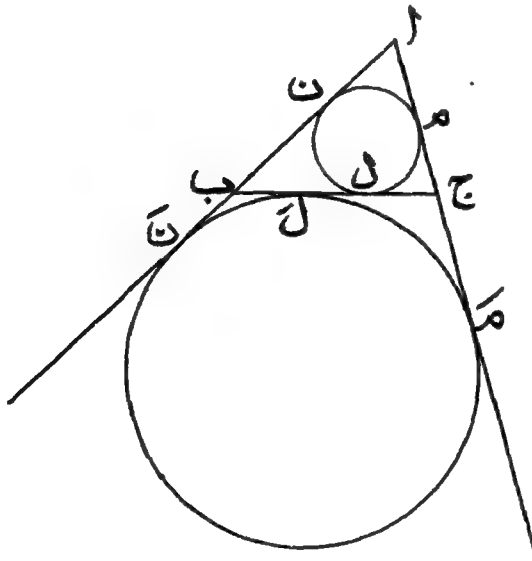
۱۲۔ مسئلہ - ایک مثلث Δ ب ج کا اندرونی دائرہ مثلث کے ضلعوں کو جن نقطوں پر مس کرتا ہے ان کے فاصلے راٹوں 'ا' ب، 'ج' سے علی الترتیب س، 'ا' س، ب، س - ج ہوتے ہیں اور 'ا' کے مقابل کے جانبی دائرے کے نقاط تماس کے فاصلے س، س - ج، س - ب ہوتے ہیں جہاں 'ا' ب، 'ج' ان ضلعوں کے طول ہیں جو علی الترتیب 'ا' ب، 'ج' کے مقابل ہیں اور س ان طولوں کے مجموعہ کا

نصف ہے۔

فرض کرو کہ اندرونی دائرہ کے نقاط تماس ل، م، ن ہیں۔ اب چونکہ ا م = ا ن، ج ل = ج م اور ب ل = ب ن اسلئے

ا م + ب ج = اضلاع کے مجموعہ کا نصف = س

$$\therefore \text{ا م} = \text{س} - \text{ب}$$



اسی طرح ب ل = ب ن = س - ب اور ج ل = ج م = س - ج

اس کے بعد فرض کرو کہ ا کے مقابل جو باہمی دائرہ بنتا ہے اسکے نقاط تماس ل، م، ن ہیں۔ تب

$$\text{ا ن} = \text{ا ب} + \text{ب ن} = \text{ا ب} + \text{ب ل}$$

$$\text{ا م} = \text{ا ج} + \text{ج م} = \text{ا ج} + \text{ج ل}$$

$$\text{ا م} = \text{ا ن}$$

اور
اور چونکہ

اس لئے ۱۲ ان = اب + اج + ب ج = ۲ س
 ۱۲ ان = س
 تیز بال = بان = س - ج اور ج ل = ج مہ =
 س - ب
 نتیجہ صریح - بال = ج ل اور اس لئے ل ل اور
 ب ج کا نقطہ وسطی وہی ہے۔



مشقیں

(11)

۱۔ اس مثلث کو جو ایک مثلث کے عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنے مثلث پائیں کہا جائے تو ثابت کرو کہ مثلث پائیں کا اندرونی مرکز ابتدائی مثلث کا مرکز عمودی ہوتا ہے اور اس کے زاویے ابتدائی مثلث کے دگنے زاویوں کے یکجہ ہوتے ہیں۔

۲۔ ایک خط مستقیم ABC جو A ب کے متوازی کھینچا گیا ہے مثلث ABC کے حائط دائرہ کو نقطوں F اور G پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ F اور G کے خطوط پائیں ایک دہ سرے کو اس عمود پر قطع کرتے ہیں جو C سے A ب پر کھینچا گیا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ پر کے تین نقطوں کے خطوط پائیں سے جو مثلث بنتا ہے وہ ان تین نقطوں کو ملانے والے مثلث کے متشابه ہوتا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے کسی وتر کے سروں کے خطوط پائیں ایک مستقل زاویہ پر متقاطع ہوتے ہیں۔ اس وتر وسطی نقطہ کا طریق معلوم کرو۔

۵۔ اگر ایک مثلث کا حائط دائرہ اور اس کے دور اس دے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کے مرکز عمودی، مرکز منہسی اور نو نقطی مرکز کے طریق دائرے ہیں۔

۶۔ دو دے ہوئے نقطوں سے ایک نقطہ کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا طریق ایک کرہ ہے۔

۷۔ ایک مثلث ABC کے ضلعوں BC ، CA ، AB پر علی الترتیب تین نقطے D ، E ، F ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثات

۸۔ ایک دائرہ مثلث ABC کے حاطہ دائرہ کے ہم مرکز کھینچا گیا ہے اور وہ مثلث کے ضلعوں AB ، BC ، CA پر علی الترتیب مقطوعے D ، E ، F کا بناتا ہے۔ اس سے ABC اب پر علی الترتیب عمود AD ، BE ، CF کھینچے گئے ہیں اور علی ایذا ABC کے ثابت کرو کہ مثلث ABC جیسے چھ مثلثوں کے حاطہ مرکز ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو نقطہ فی دائرہ کے ہم مرکز ہے اور جس کا نصف قطر ابتدائی دائرہ کے نصف قطر کا آدھا ہے۔

۹۔ ایک مستوی چار ضلعی کو اس کے اندرونی وتروں سے چار مثلثوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ چار ضلعی جن کے راس ان مثلثوں کے (۱) مرکز عمودی اور (۲) حاطہ مرکز ہیں متشابہ متوازی الاضلاع ہیں اور اگر ان متوازی الاضلاع شکلوں کے رقبے Q_1 اور Q_2 ہوں اور ابتدائی چار ضلعی کا رقبہ Q ہو تو ثابت کرو کہ $Q = Q_1 + Q_2$ ۔

۱۰۔ ایک خط ایک مثلث کے راس کو اندرونی دائرہ کے اس نقطہ سے ملتا ہے جو قاعدہ سے بعید ترین ہے، ثابت کرو کہ یہ خط جانبی دائرہ اور قاعدہ کے نقطہ تماس میں سے بھی گزرتا ہے۔

۱۱۔ اگر مقدار اور محل میں وہ خطوط دئے جائیں جو ایک مثلث کے راس کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں جن پر اندرونی دائرہ اور قاعدہ کا جانبی دائرہ قاعدہ کو مس کرتے ہیں تو مثلث کو بناؤ۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ جب چار نقطہ A ، B ، C ، D ایک دائرہ پر واقع ہوں تو مثلثات ABC ، BCD ، CDA ، DAB کے عمودی مرکز ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا نصف قطر ابتدائی دائرہ کے

نصف قطر کے مساوی ہے۔
۱۳۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے ایک قطر کے سروں
خطوط پائین نو نقطہ دائرہ پر علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۴۔ (ب ج) ایک مثلث ہے اور و اس کا حائط مرکز۔ و د
جو ب ج پر عمود ہے حائط دائرہ سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط
جو د میں سے گزرتا ہے اور (ک) پر عمود ہے گ ع کی منصف کر لیا
جہاں ع مرکز عمودی ہے۔

۱۵۔ اگر ایک مثلث کا حائط دائرہ اور اس کا ایک راس اور نیز ان خطوں
طول دے گئے ہوں جو دے ہوئے راس کو مرکز عمودی اور مرکز ہندسی سے
ملائے ہیں تو مثلث بناؤ۔

۱۶۔ اگر (ب) کو د پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ

$$ل \times و = م \times ب$$

اور اگر ف کوئی نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$ل \times (ف + م) \times ب = ف \times (ل + م) \times و + ل \times و + م \times ب + و \times$$

اگر ایک مثلث (ب ج) کے ضلعوں کے طول و ب ج ہوں
اور ایک نقطہ ف ایسا ہو کہ ل ف (ب + و) ف ب (ل + م) ف ج
مستقل ہو تو نقطہ ف کا طریق معلوم کرو۔



18)

دوسرا باب

دائرہ کے بعض خواص

۱۳۔ تعریف۔ اگر دو نقطے F اور F' ایک دائرہ کے ایک ہی نصف قطر پر اور دائرہ کے مرکز O کی ایک ہی جانب واقع ہوں اور اگر O سے ان کے فاصلے ایسے ہوں کہ

$$OF \times OF' = \text{دائرہ کے نصف قطر کا مربع}$$

تو ان نقطوں کو دائرہ کے لحاظ سے مقلوب نقطے کہا جاتا ہے۔

طالب علم بطور خودیہ ثابت کر سکتا ہے کہ ایک بیرونی نقطہ F سے مرکز O والے دائرہ کے دو مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کے نقاط تماس کو ملائیے اور OF کے علی القیام ہوتا ہے اور OF کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جو F کا مقلوب ہے۔

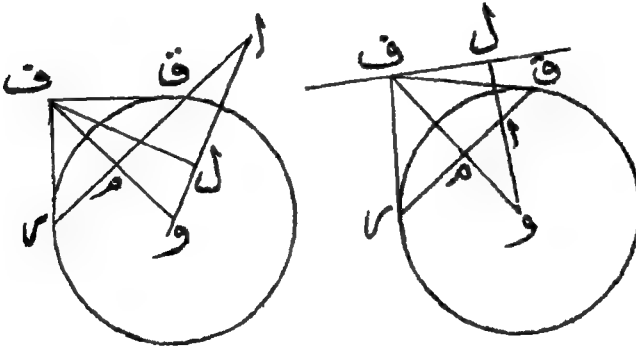
۱۴۔ ایک دائرہ کے لحاظ سے ایک نقطہ کے قطبی کی

تعریف حسب ذیل مسئلہ سے معلوم ہوگی۔

مسئلہ۔ ایک دائرہ کے ایسے وتر کھینچے گئے ہیں جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ ان وتروں کے

سروں پر تماسوں کے زوج کھینچے گئے ہیں۔ ان زوجوں کے
نقاط تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے جسے اس ثابت نقطہ کا
قطعی کہتے ہیں اور اس ثابت نقطہ کو اس خط کا قطب کہتے ہیں۔
فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز O ہے اور اس کے مستوی میں ایک ثابت نقطہ A ہے۔
اس دائرہ کا کوئی وتر BC سراسیمہ جو A میں سے گزرے۔
فرض کرو کہ C اور B پر کے تماس F پر ملتے ہیں۔
ف A اور O پر عمود کھینچو۔
فرض کرو کہ وہ A سے C کو نقطہ M پر علی القوائم قطع کرتا ہے۔
تب F M O دائری ہے۔
: $OA \times OM = OC \times OB =$ نصف قطر کا مربع
: A ایک ثابت نقطہ ہے یعنی A کا مقلوب۔

(14)



پس F کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو O اور A پر عمود ہے اور
اس کو A کے مقلوب نقطہ میں قطع کرتا ہے۔

۱۵۔ گذشتہ دفعہ سے یہ واضح ہے کہ کسی بیرونی نقطہ کا قطبی دائرہ کے اُس وتر پر منطبق ہوتا ہے جو اس نقطہ سے کھینچے ہوئے ماسوں کے نقاط تماس کو ملاتا ہے۔ اس وتر کو وتر تماس کہتے ہیں۔ اگر ہم خیالی خطوں کے اُس تصور کو بھی اپنی بحث میں داخل کریں جو ہندسہ تحلیلی میں اختیار کیا جاتا ہے تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کسی نقطہ کا قطبی اس نقطہ سے کھینچے ہوئے حقیقی یا خیالی ماسوں کے وتر تماس پر منطبق ہوتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ دائرہ پر کے کسی نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا تماس ہوتا ہے۔

بعض مصنفین کسی نقطہ کے قطبی کی یہ تعریف کرتے ہیں کہ وہ اُس نقطہ سے کھینچے ہوئے ماسوں کا وتر تماس ہے اور دوسرے اس کی موسیقی خاصیت کے ذریعہ جو کسی آئندہ باب میں بیان کی جائے گی اس کی تعریف کرتے ہیں۔ یہ بدقسمتی ہے کہ ایسا اختلاف پایا جاتا ہے۔ لیکن اس کتاب کے مصنف کی نظر میں وہ طریقہ جو یہاں اختیار کیا گیا ہے بہترین ہے۔

۱۶۔ مسئلہ۔ اگر اکا قطبی اب میں سے گذرے تو ب کا قطبی ا میں سے گذرے گا۔

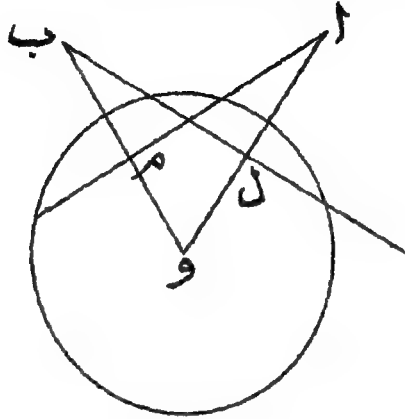
فرض کرو کہ اکا قطبی ب ل ہے جو داکول پر علی القوا

قطع کرتا ہے۔ ام، وب کے علی القوا اُم کھینچو۔ تب

$$وم \times وب = ول \times وا = نصف قطر کامریج$$

∴ خط ام نقطہ ب کا قطبی ہے۔

یعنی نقطہ (نقطہ ب کے قطبی پر واقع ہوتا ہے۔



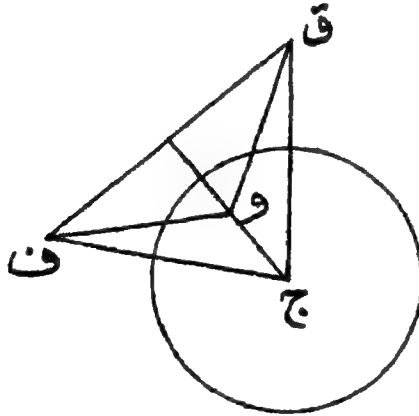
وہ دو نقطے جنہیں سے ہر ایک کا قطبی دوسرے کے قطبی میں سے گذرتا ہے فردوج نقطے کہلاتے ہیں۔
طالب علم بطور خود یہ دیکھ سکتا ہے کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے متقارب نقطے فردوج نقطوں کی ایک خاص صورت ہیں۔
طالب علم بطور مشق یہ ثابت کرے کہ اگر 'ل' 'م' دو ایسے خط ہوں کہ 'ل' کا قطب 'م' پر واقع ہے تو 'م' کا قطب 'ل' پر واقع ہوگا۔
ایسے دو خطوں کو فردوج خط کہتے ہیں۔

فردوج نقطوں کی سندرجہ بالا خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ہم خط نقطوں کی کسی تعداد کے قطبی سبب کے سبب ایک مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔ یعنی اس خط کے قطب میں سے جس پر وہ واقع ہیں۔ کیونکہ اگر ایک خط 'ف' پر جس کا قطب 'ق' ہے 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ مختلف نقطے لئے جائیں تو چونکہ 'ق' کا قطبی 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ میں سے گذرتا ہے اس لئے 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ کے قطبی 'ق' میں سے گذریں گے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو نقطوں کے قطبیوں کا نقطہ تقاطع اس خط کا قطب

ہوتا ہے جو انہیں ملاتا ہے۔

- ۱۱۶۔ مسئلہ۔ اگر وف اور وق ایک دائرہ کے مزدوج خطوں کا جو و کے قطبی سے ف اور ق پر ملتے ہیں ایک زوج ہو تو مثلث وف ق ایسا ہوگا کہ اس کا ہر رأس مقابل کے ضلع کا قطب ہوگا اور دائرہ کا مرکز مثلث کا مرکز عمودی ہوگا۔

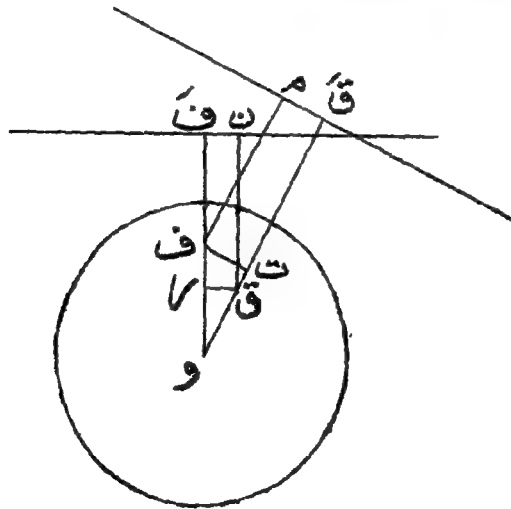
کیونکہ وق کا قطب 'و' کے قطبی پر واقع ہونا چاہئے اور نیزہ وف پر بھی واقع ہوتا ہے کیونکہ وف اور وق مزدوج خط ہیں۔ اس لئے وق 'ف' کا قطبی ہے۔ اسی طرح وف 'ق' کا قطبی ہے۔



- نیز وہ خطوط جو 'ف'، 'ق' کو ج سے ملاتے ہیں علی الترتیب ان نقطوں کے قطبیوں پر عمود ہیں اور اس لئے ج، مثلث کا مرکز عمودی ہے۔
- ۱۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ (مرکز و) کے

مستوی میں ف اور ق کوئی دو نقطے ہوں تو وف: وق
 = ف سے ق کے قطبی پر عمود: ق سے ف کے قطبی پر عمود
 فرض کرو کہ ف اور ق کے مقلوب نقطے فسا اور قسا ہیں
 جنہیں سے ف اور ق کے قطبی گزرتے ہیں۔
 فرض کرو کہ قضیوں پر عمود فم اور قن ہیں۔ فسا
 اور قسا علی الترتیب وق اور وف پر عمود کھینچو۔ تب
 وف × وفسا = وق × وقسا
 کیونکہ ہر ایک حاصل ضرب نصف قطر کا مربع ہے۔ نیز
 دسا × وف = دتا × وق کیونکہ فسا قسا قات دائری ہے
 ∴ $\frac{وق}{وقسا} = \frac{وف}{وفسا} = \frac{دسا}{دتا} = \frac{وق}{وقسا}$
 پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

(17)



یہ مسئلہ سامن کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے۔

۱۸۔ مسئلہ۔ اُن نقطوں کا طریق جن سے دو دائرے ہوں
ہم مستوی دائروں کے تماس مساوی ہوں ایک خط ہوتا ہے
جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر عمود ہوتا ہے۔

اس خط کو دائروں کا بنیادی محور کہتے ہیں۔
فرض کرو کہ ک' ف' ق' دو دائروں کے تماس مساوی تماس
ہیں اور دائروں کے مرکز ا' اور ب' ہیں۔

ف' ل' اب پر عمود کھینچو۔ ف' ا' ک' ب' ا' گ اور ب' ق'
کو ملاؤ۔ اب

ف' ک' = ا' ف'۔ ا' ک' = ف' ل' + ل'۔ ا' ک'

اور ف' ق' = ف' ب'۔ ب' ق' = ف' ل' + ل' ب'۔ ب' ق'

∴ ا' ل'۔ ا' ک' = ل' ب'۔ ب' ق'

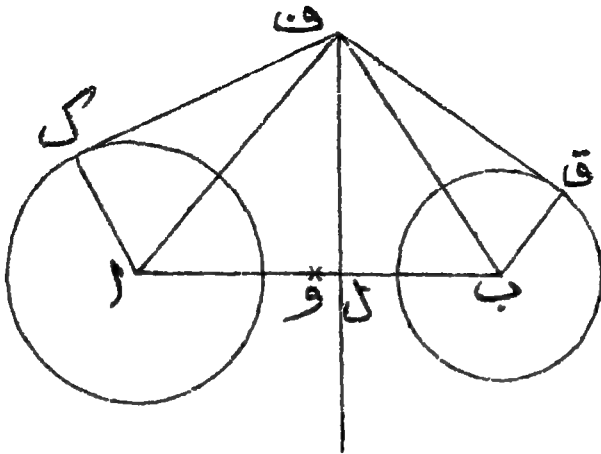
∴ ا' ل'۔ ل' ب' = ا' ک'۔ ب' ق'

∴ (ا' ل'۔ ل' ب') (ا' ل' + ل' ب') = ا' ک'۔ ب' ق'

پس اگر وہ اب کا وسطی نقطہ ہو تو

۲۰ ل' x اب = نصف قطروں کے مربعوں کا فرق

∴ ل' ایک ثابت نقطہ ہے اور ف' کا طریق ایک خط ہے جو اب پر عمود ہے



(18)

اگر دو دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو چونکہ ان کے محدودہ وتر مشترک پر کے نقطوں سے دائروں کے ماس مساوی ہوتے ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ دو متقاطع دائروں کا بنیادی محور ان کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ اور اگر خیالی نقطوں کے تصور کو بھی داخل کیا جائے تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ دو دائروں کا بنیادی محور ان کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے خواہ یہ نقطے حقیقی ہوں یا خیالی۔

۱۹۔ دو ہم مستوی دائروں کے مستوی میں کسی نقطہ

سے ان دائروں کے ماسوں کے مربعوں کا فرق ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو ف سے دائروں کے بنیادی محور پر کھینچا گیا ہے

فرض کرو کہ ف سے دائروں کے ماس ف ق اور ف ا

ہیں اور دائروں کے مرکز ا اور ب ہیں۔

فرض کرو کہ بنیادی محور ن ل پر عمود ف ن ہے اور ا ب پر

ف م۔ فرض کرو کہ ا ب کا وسطی نقطہ ہے۔ ف ا ف ب کو

ملاؤ۔ اب

ف ق۔ ف ر۔ ف ا۔ اق۔ (ف ب۔ ب ر)

= ف ا۔ ف ب۔ اق۔ ب ر

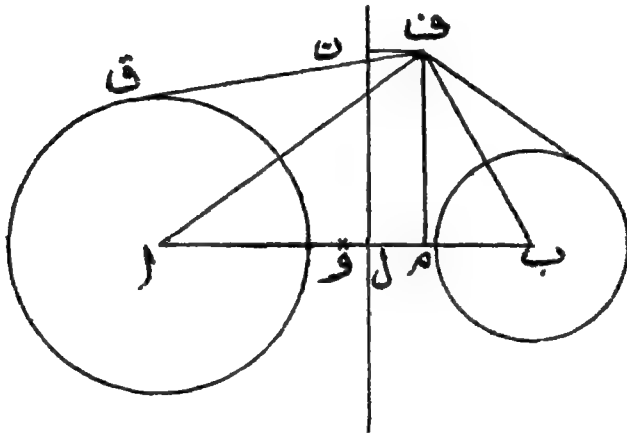
= م ر۔ م ب۔ اق۔ ب ر

= ۲ و م × اب۔ ۲ و ل × اب (دیکھو صفحہ ۱۸)

= ۲ اب × ل م = ۲ اب × ن ف

اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

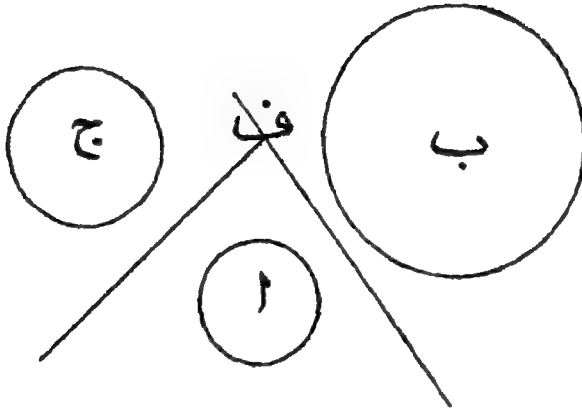
(19)



بعض مصنفین ایک نقطہ سے دائرہ کے مماس کے مربع کے لئے اصطلاح ”نقطہ کی طاقت“ لحاظ دائرہ بھی استعمال کرتے ہیں۔

۲۰۔ مسئلہ۔ تین ہم مستوی دائروں کے بنیادی محور

جبکہ دائروں کو دو دو کر کے لیا جائے ایک نقطے میں ملتے ہیں۔



فرض کرو کہ دائروں (ا) اور (ب) کا بنیادی محور دائروں (ج) اور (ج) کے بنیادی محور سے 'ف' میں ملتے ہیں۔

(20)

اب 'ف' سے دائرہ ج کا ماس

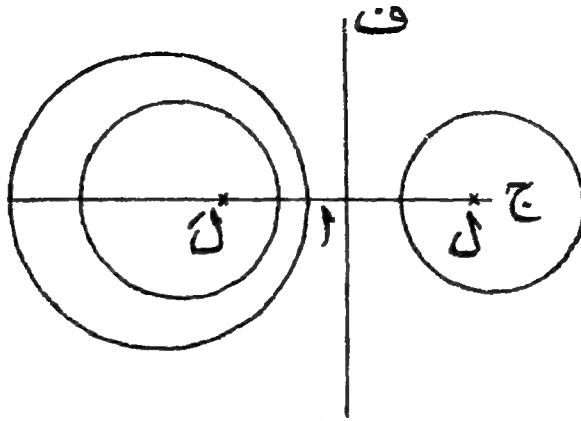
= 'ف' سے دائرہ (ا) کا ماس

= 'ف' سے دائرہ ب کا ماس

∴ نقطہ 'ف' دائروں ب اور ج کے بنیادی محور پر ہے۔

۲۱۔ ہم محور دائرے۔ ہم مستوی دائروں کا ایسا نظام کہ

انہیں سے کسی زوج کا بنیادی محور وہی ہو ہم محور نظام کہلاتا ہے۔
صریحاً ایسے دائروں کے مرکز ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہونگے۔



فرض کرو کہ ہم محور دائروں کے ایک نظام کا مشترک بنیادی محور
ان کے مرکوزوں کے خط کو نقطہ 'ا' پر قطع کرتا ہے۔

اب 'ا' سے تمام دائروں کے ماس مساوی ہوں گے۔
فرض کرو کہ 'ا' کی متقابلہ سمتوں میں 'ل'، 'ل' دو نقطے ہیں ایسے کہ
ال، ال طول میں ان ماسوں کے مساوی ہیں جو 'ا' سے دائروں
کے کھینچے گئے ہیں۔ ل اور ل کو نظام کے انتہائی نقطے کہتے ہیں۔

یہ نقطے ایسے ہوتے ہیں کہ ان سے بنیادی محور پر کے کسی نقطہ 'ف' کا
فاصلہ اس ماس کے طول کے مساوی ہوتا ہے جو 'ف' سے نظام کے
کسی دائرہ تک کھینچا گیا ہو۔

21) کیونکہ اگر دائروں میں سے ایک کا مرکز ج ہو اور نصف قطر
ر تو

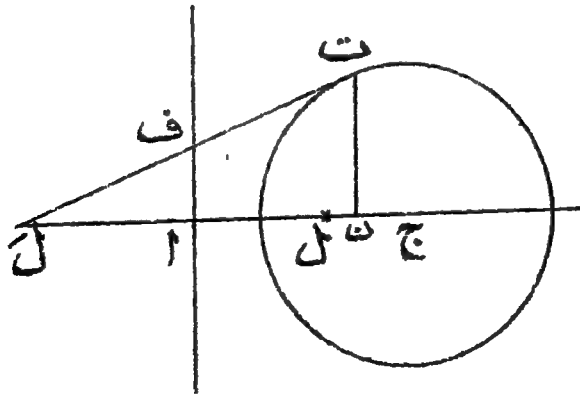
$$ف ل = ف ا + ا ل = ف ا + ج ر = ف ج - ر$$

= ف سے دائرہ ج کے ماس کا مربع
یہ دو نقطے ل اور ل لا انتہا چھوٹے نصف قطر کے دائروں کے

مرکز سمجھ جاسکتے ہیں۔ انہیں بعض اوقات نظام کے نقطہ دائرے کہا جاتا ہے۔
طالب علم کو اس کا اطمینان کر لینے میں کوئی وقت پیش نہیں آئیگی کہ
ان دو انتہائی نقطوں میں سے ایک نظام کے ہر دائرہ کے اندر اور دوسرا
باہر ہوتا ہے۔

یہ دیکھ لینا چاہئے کہ انتہائی نقطے صرف اس صورت میں حقیقی
ہوتے ہیں جبکہ ہم محور دائروں کا نظام حقیقی نقطوں میں متقاطع نہ ہو
کیونکہ اگر دائرے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں تو ان دائروں
کے اندر واقع ہوگا اور اس لئے ان سے دائروں کے ماس خیالی ہونگے۔
نیز یاد رہے کہ اگر ہم محور نظام کے دو دائرے نقطوں ف اور ق
میں متقاطع ہوں تو اس نظام کے سب دائرے ف اور ق میں سے
گذریں گے۔

۲۲۔ ہم محور دائروں کے کسی نظام کے انتہائی نقطے اس
نظام کے ہر دائرہ کے لحاظ سے متقابل نقطے ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ نظام کے کسی ایک دائرہ کا مرکز ج ہے۔ فرض کرو کہ اس نظام کے انتہائی نقطے ل اور ل ہیں جن میں ل دائرہ ج کے باہر واقع ہے۔

دائرہ ج کا مماس ل ت کھینچو۔ یہ مماس بنیادی محور سے (22) نقطہ ت پر تنصیف ہوگا۔

ت ن ، مرکزوں کے خط پر عمود کھینچو۔ اب

$$ل : ا : ان = ل : ت : ت$$

$$ل : ا = ل : ان$$

ن ، ل پر منطبق ہوتا ہے۔

پس ل سے کھینچے ہوئے مماسوں کا وتر مماس مرکزوں کے خط کو علی القوائم ل میں قطع کرتا ہے۔ اس لئے ل اور ل مقلوب نقطے ہیں۔

۲۱۔ طالب علم حسب ذیل دو مسئلے بہت آسانی سے ثابت کر سکتا ہے۔

ہر دائرہ جو انتہائی نقطوں میں سے گزرتا ہے نظام کے تمام دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

کسی ہم محور نظام کے دو دائروں کے مشترک مماس کے محاذی کسی ایک انتہائی نقطہ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

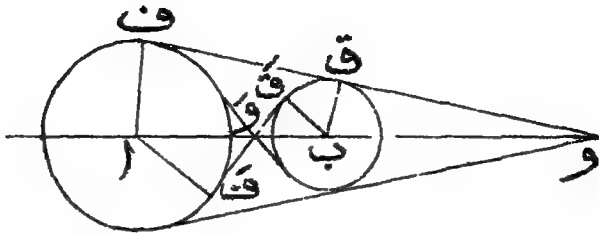
۲۲۔ دو دائروں کے مشترک مماس۔

بالعموم دو ہم مستوی دائروں کے چار مشترک مماس کھینچے جائیں گے۔

ان چار مماسوں میں سے دو مرکزوں کے خط کو خارجاً قطع کرینگے

انہیں راست مشترک مماس کہا جاتا ہے۔ باقی دو مماس مرکزوں کے

خط کو داخل قطع کریں گے، انہیں قاطع مشترک ماس کہتے ہیں۔



اب ہم ثابت کریں گے کہ دو دائروں کے مشترک ماس مرکزوں کے خط کو دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو اس خط کو داخل اور خارجاً نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک راست مشترک ماس 'ف' 'ق' مرکزوں 'ا' اور 'ب' کو ملائی ہو خط کو 'و' پر قطع کرتا ہے۔ 'ا' 'ف'، 'ب' 'ق' کو ملاؤ۔
اب چونکہ 'ف' اور 'ق' قائمہ زاویے ہیں اس لئے مثلثات 'ا' 'ف' 'و'، 'ب' 'ق' 'و' متشابه ہیں اور اس لئے

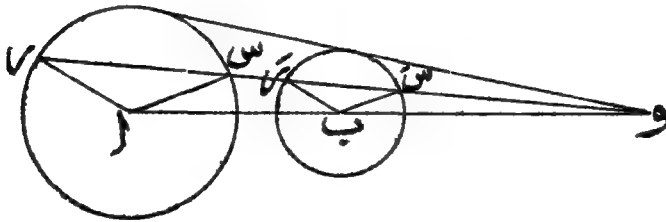
(28)

$$ا: و = ا: ف = ب: ق$$

اسی طرح اگر 'ف' 'ق' ایک قاطع مشترک ماس ہو جو 'ا' 'ب' کو 'و' پر قطع کرتا ہے تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ 'ا' 'و' : 'ب' 'و' = نصف قطروں کی نسبت۔

اس طرح ہمیں مشترک ماسوں کو کھینچنے کا ایک سادہ عمل ملتا ہے یعنی 'ا' 'ب' کو داخل اور خارجاً 'و' اور 'و' پر نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرو اور پھر 'و' سے کسی ایک دائرہ کا ماس کھینچو، یہ ماس دوسرے دائرہ کا بھی ماس ہوگا۔

اگر دائرے حقیقی نقطوں میں متقاطع ہوں تو کس سے کہیں گے ہوے
ماس خیالی ہونگے۔
اگر ایک دائرہ دوسرے کے بالکل اندر واقع ہو تو وہ اور وہ دونوں
سے کہیں گے ہوے ماس خیالی ہونگے۔
۲۵۔ فرض کرو کہ نقطہ و سے جس کی تعریف گذشتہ دفعہ میں کی گئی ہے
ایک خط کھینچا گیا ہے جو دائروں کو سس اور سس میں قطع
کرتا ہے (دیکھو ذیل کی شکل)



مثلثات و ا س، و ب س پر غور کرو تو ملاحظہ ہوگا
و ا : و ب = ا س : ب س
نیز زاویہ و دونوں میں مشترک ہے اور و ا اور و ب کے
باقی زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔ اس لئے مثلثات
متشابه ہیں اور

$$و ا : و ب = ا س : ب س$$

یعنی نصف قطروں کی نسبت۔

اسی طرح مثلثات و ا س، و ب س پر غور کرنے سے
جس میں و ا اور و ب کے زاویوں میں سے ہر ایک قائمہ زاویہ
سے بڑا ہے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$و ا : و ب = ا س : ب س$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ P کو دائرہ A سے نقطہ O کے ذریعہ بنایا جاسکتا ہے۔ نقطہ O سے دائرہ A کے تمام نقطوں سے سمتی نیم قطر OA اور انہیں نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرو تو یہ حال نقطہ دائرہ P پر واقع ہوں گے۔

اسی خاصیت کی بناء پر O کو ان دو دائروں کا مشابہت کا مرکز کہتے ہیں اور نقطہ O کو اس کا جواب کہتے ہیں۔

اسی طرح طالب علم بطور خود یہ ثابت کر سکتا ہے کہ O بھی مشابہت کا مرکز ہے۔

۲۶۔ یہ ثابت کرنے میں کسی ایسے نقطہ کا طریق جو کسی دے ہوئے قانون کی پابندی کرے ایک دائرہ ہوتا ہے اکثر گذشتہ دفعہ کے نتائج کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

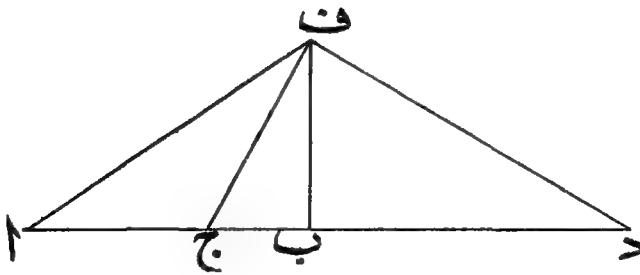
اگر ہم ثابت کر سکیں کہ ہمارا نقطہ F ایسا ہے کہ وہ ایک ثابت نقطہ O اور ایک متغیر نقطہ Q کے ملائی والے خط کو ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اگر یہ متغیر نقطہ Q ایک دائرہ A میں گزرتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ F کا طریق بھی ایک دائرہ ہونا چاہئے جس کا اور نیز Q والے دائرہ کا مشابہت کا مرکز ہوگا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک مثلث کا حاطہ دائرہ A اور اس کے دور اس دیے گئے ہیں اور نو نقطہ O مرکز کا طریق معلوم کرنا ہے۔ یہ ثابت کرنا بہت آسان ہے کہ مرکز عمودی کا طریق ایک دائرہ ہے اور اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ نو نقطہ O مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے کیونکہ اگر O حاطہ مرکز ہو (جو دیا گیا ہے) اور E مرکز عمودی ہو (جو ایک دائرہ A میں گزرتا ہے) اور E نو نقطہ O مرکز ہو تو E پر واقع ہوتا ہے اور $E = \frac{1}{2} OF$ اس لئے E کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز اس خط میں ہے جو O کو اس دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے جس پر E واقع ہے۔

۲۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک نقطہ ایک مستوی سطح میں اس طرح

حرکت کرے کہ اس کے فاصلے مستوی کے دو ثابت نقطوں سے ایک مستقل نسبت میں رہیں تو نقطہ کا طریق ایک دائرہ ہوتا ہے۔
 فرض کرو کہ A اور B دو دیے ہوئے نقطے ہیں۔ A B کو داخلاً اور خارجاً C اور D پر دی ہوئی نسبت میں تقسیم کرو، اس طرح C اور D مطلوبہ طریق پر دو نقطے ہوں گے۔
 فرض کرو کہ طریق پر کوئی اور نقطہ F ہے۔
 اب چونکہ

$AF : FB = AC : CB = AD : DB$
 اس لئے F C اور F D ، زاویہ AFB کے داخلاً اور خارجاً ناصف ہیں۔
 ∴ F C D زاویہ قائمہ ہے۔
 ∴ F کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا قطر CD ہے۔



نتیجہ صریح ۱۔ اگر نقطہ F ایک مستوی میں مقید نہ ہو تو اس کا طریق ایک کرہ ہوگا جس کا قطر CD ہوگا۔
 نتیجہ صریح ۲۔ اگر خط AB داخلاً اور خارجاً C اور D پر اسی نسبت میں تقسیم ہو اور F کوئی نقطہ ہو جس پر C D کے محاذی

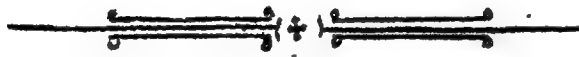
ایک قائمہ زاویہ بنے تو ف ج اور ف د زاویہ ڈ ف ب کے داخلی اور خارجی ناصف ہوں گے۔

۲۸۔ مرکزوں ڈ اور ب والے دائروں کے مشابہت کے مرکز (حسب تعریف دفعہ ۲۵) و اور و ہیں اگر خط و و پر ایک دائرہ بنایا جائے اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ ج ہو تو دفعہ ۲۷ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ج ۱: ج ب = دائرہ ڈ کا نصف قطر : دائرہ ب کا نصف قطر

اس دائرہ کو جس کا قطر و و ہے مشابہت کا دائرہ کہتے ہیں۔

اس کا استعمال آخری باب میں جہاں اشکال کی مشابہت پر بحث کی گئی ہے بتلایا جائیگا۔



مشقیں

(26)

- ۱۔ اگر ایک دئے ہوئے دائرہ Δ پر کوئی نقطہ F ہو تو F سے کسی دوسرے دئے ہوئے دائرہ B کے مماس کا مرکز دائروں Δ اور B کے بنیادی محور سے F کے عمودی فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے۔
- ۲۔ اگر Δ ، B ، C تین ہم محور دائرے ہوں تو C کے کسی نقطے سے Δ اور B کے مماس ایک مستقل نسبت میں ہوتے ہیں۔
- ۳۔ اگر ایک نقطہ F سے دو دئے ہوئے دائروں کے مماس ایک دی ہوئی نسبت میں ہوں تو F کا طریق ایک دائرہ ہے جو Δ اور B کے ساتھ ہم محور ہے۔
- ۴۔ اگر ہم محور دائروں کا ایک نظام Δ ، B ، C ، وغیرہ ہو اور Δ کوئی اور دائرہ ہو تو Δ ، B ، C ، وغیرہ کے بنیادی محور ایک نقطہ میں ملتے ہیں۔
- ۵۔ دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطوں میں سے کسی ایک کو دائروں میں سے کسی ایک پر کے کسی نقطہ F سے ملانے والے خط کا مربع F سے بنیادی محور کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے۔
- ۶۔ اگر دو دائرے دوسرے دو دائروں کو علی القواہم قطع کریں تو کسی ایک زوج کا بنیادی محور وہ خط ہے جو دوسرے زوج کے مرکزوں کو ملاتا ہے اور ان کے انتہائی نقطوں میں سے گذرتا ہے۔
- ۷۔ اگر دو دئے ہوئے دائروں کے مشابہت کے دائرہ (دفعہ ۲۸) پر کوئی نقطہ لیا جائے اور اس نقطہ سے دونوں دائروں کے مماسوں کے زوج کھینچے جائیں تو ایک زوج کا درمیانی زاویہ دوسرے زوج کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۸۔ تین دائرے ہوئے دائروں (ہیں سے دودو) کے مشابہت کے تین دائرے ہم محور ہوتے ہیں۔

۹۔ ایک دائرے ہوئے دائرہ پر نقطوں کا ایک زوج معلوم کر دو جو نقطوں کے دودوئے ہوئے زوجوں میں سے ہر ایک کے ہم دائری ہو۔

۱۰۔ اگر کوئی خط دودوئے ہوئے دائروں کو علی الترتیب F ، C اور F ، C پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ وہ چار نقطے جہاں F اور C پر کے مماس F اور C پر کے مماسوں کو قطع کرتے ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو دوئے ہوئے دائروں کے ساتھ ہم محور ہوتا ہے۔

۱۱۔ دائروں کے ایک ہم محور نظام کے انتہائی نقطے G ، K ہیں، اس نظام کے ایک دائرہ کو M سے کہنا ہو ایک خط F ، C کھینچا گیا ہے جو دائرہ کو F پر M سے کہنا ہے، اس خط پر ایک نقطہ C ہے جو بنیادی محور کی اس جانب ہے جو F کے مقابل ہے۔ اگر C ، T ، A ، M مماسوں کے طوں ہوں جو F سے A ، D ، M مرکز دائروں کے کھینچے گئے ہیں جنکا مشترک مرکز C ہے اور جن کے نصف قطر علی الترتیب C ، K ، F ، C ہیں تو ثابت کرو کہ

T ، D ، F ، K ، F ، K

۱۲۔ ایک دائرہ J کے محیط پر ایک ثابت نقطہ O ہے اور F اس دائرہ پر کوئی اور نقطہ ہے۔ F کا مقلوب نقطہ C ایک ثابت دائرہ کے لحاظ سے لیا گیا ہے جسکا مرکز O ہے۔ ثابت کرو کہ C کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(27)

۱۳۔ تین دائرے J ، J ، J ایسے ہیں کہ J اور J کا وتر تقاطع J کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور J اور J کا وتر تقاطع J کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ J اور J کا وتر تقاطع J کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۱۴۔ تین دائروں 'ا' 'ب' 'ج' کو ایک دائرہ جس کا مرکز 'ف' ہے خارجاً مس کرتا ہے اور ایک دائرہ جس کا مرکز 'ق' ہے داخلاً مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ف' 'ق' اس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس پر دائروں 'ا' 'ب' 'ج' (میں سے دودو) کے بنیادی محور ملتے ہیں۔

۱۵۔ ایک دائرہ 'س' کا ایک قطر 'ا' 'ب' ہے، 'ا' 'ب' یا 'ا' 'ب' محدودہ پر ایک نقطہ 'و' ہے، 'ج' ایک دائرہ ہے جس کا مرکز 'و' ہے۔ دائرہ 'ج' کے لحاظ سے نقاط 'ا' اور 'ب' کے مقلوب نقطے 'ا' اور 'ب' ہیں۔ ثابت کرو کہ 'س' کے لحاظ سے نقطہ 'و' کا جو قطبی ہے اس کا دائرہ 'ج' کے لحاظ سے قطب 'ا' 'ب' کا وسطی نقطہ ہے۔

۱۶۔ کرویوں کا ایک نظام ایک مستوی کو ایک ہی نقطہ 'و' پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کوئی مستوی جو 'و' میں سے نہ گذرتا ہو ان کرویوں کو ہم محور دائروں کے ایک نظام میں قطع کرے گا۔

۱۷۔ ایک نقطہ اور ایک متغیر دائرہ کے لحاظ سے اس کا قطبی دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی دوسرے نقطہ 'ا' کا قطبی ایک ثابت نقطہ 'ب' میں سے گذرتا ہے۔

۱۸۔ ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مستوی میں ایک نقطہ 'ا' دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس نظام کے دائروں کے لحاظ سے نقطہ 'ا' کے قطبی سب کے سب ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں۔

تیسرا باب

(28)

علامتوں کا استعمال نقطوں کا ہم خط اور خطوں کا ہم نقطہ ہونا۔

۲۹۔ علم مثلث اور علم ہندسہ تحلیلی میں خطوں کی پیمائش کے لئے علامتوں کی جو قرارداد اختیار کر لی گئی ہے اس سے طالب علم واقف ہوگا۔ اس قرارداد کے مطابق ایک خط پر ایک نقطہ سے پیمائش کا طول مثبت یا منفی شمار کئے جاتے ہیں بموجب اس کے کہ یہ طول اس نقطہ سے ایک خاص یا دوسری سمت میں ناپے گئے ہوں۔ اس قرارداد کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک خط میں 'ا' ب ج تین نقطے ہوں تو اس خط میں خواہ کسی ترتیب سے یہ نقطے واقع ہوں

$$ا ب + ب ج = ا ج$$



اگر ج ' اور ب کے درمیان واقع ہے تو ب ج کی علامت
 ا ب کی علامت کے مخالف ہے اور اس صورت میں ا ب + ب ج
 سے وہ حقیقی فاصلہ نہیں حاصل ہوتا جو ا سے ب تک اور پھر ب سے
 ج تک گزرنے میں طے ہوا ہے لیکن اس سے وہ آخری فاصلہ ملتا ہے
 جو ا سے ج کا ہے۔

اوپر کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ب ج = ج - ا ب$$

یہ ایک اہم نتائج ہے۔ اس کے ذریعہ ہم سب طولوں کو ان
 طولوں پر تحويل کر کے منحصر کر سکتے ہیں جو خط کے ایک ثابت نقطہ سے
 پیمائش کئے گئے ہوں۔ اس عمل کو داخل مبداء کے نام سے موسوم
 کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مثلاً اگر ہم مبداء و کو داخل کریں تو

$$ا ب = و ب - و ا$$

۳۔ مسئلہ۔ اگر خط ا ب کا نقطہ وسطی مر ہو اور
 اس خط میں و کوئی اور نقطہ ہو تو
 $و م = و ا + و ب$

ب م ا و
 کیونکہ مبداء و داخل کرنے سے حاصل ہوتا ہے
 $و م - و ا = و ب - و م$

۳۔ اگر ایک خط پر نقطوں کی ایک تعداد واقع ہو تو ہم کہتے
 ہیں کہ نقطے ایک سمت بناتے ہیں۔

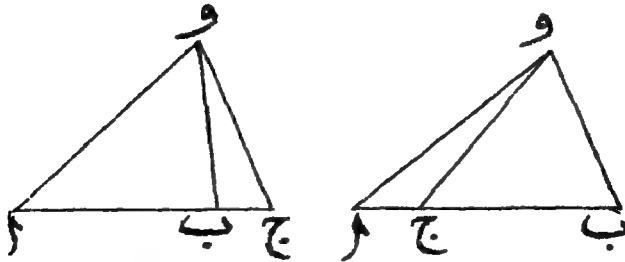
مسئلہ۔ اگر چار نقطوں کی ایک سمت 'ا' ب 'ج' د ہو تو

$$ا ب \times ج د + ب ج \times ا د + ج د \times ا ب = د ا \times ب ج + ا ج \times ب د + ب د \times ا ج$$

کیونکہ مبدا ا کو داخل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دائیں جانب کا جملہ

$$= (ا ب \times ا د - ا ج \times ا ب) + (ا ج \times ا د - ا ج \times ا ب) + (ا ج \times ا د - ا ج \times ا ب)$$

اور یہ صفر ہے۔
یہ ایک اہم تہا شدہ ہے جسے ہم آئندہ استعمال کریں گے۔
۳۲۔ اگر نقطوں کی ایک سمت 'ا' ب 'ج' ہو اور ان کے خط سے باہر کوئی نقطہ ہو تو ہم جانتے ہیں کہ مثلث و ا ب کے رقبہ کو جو نسبت مثلث و ب ج کے رقبہ کے ساتھ ہے وہ قاعدوں ا ب و ب ج کے طو لوں کی نسبت ہے۔



اب اگر ہم طو لوں ا ب و ب ج کی علامتوں کا لحاظ کر رہے ہیں اور نسبت ا ب : ب ج واقع ہوتی ہے تو ہم اس نسبت کی بجائے نسبت ۵ و ا ب : ۵ و ب ج درج نہیں کر سکتے تا آنکہ رقبہ کی

(30) علامتوں سے متعلق کوئی ایسی قرار داد نہ ہو جائے کہ جب (ب:ج) کی بجائے رقبوں کی نسبت درج کیجائے تو (ب:ج) کی علامت باقی رہے۔

اس کے لئے صریح قرار داد یہ ہے کہ مثلث Δ ق Δ ق Δ ق کا رقبہ مثبت یا منفی شمار کیا جائے بموجب اس کے کہ جب گھیرا Δ ق Δ ق Δ ق مرشتم ہو تو یہ مثلث ایک یا دوسری جانب واقع ہو۔

مثلاً اگر مثلث ہمارے دائیں ہاتھ کی جانب ہو جبکہ ہم گھیرے Δ ق Δ ق Δ ق پر چلیں تو ہم Δ ق Δ ق Δ ق کو ایک مثبت مقدار شمار کریں گے لیکن Δ ق Δ ق Δ ق ایک منفی مقدار ہو گا کیونکہ گھیرا Δ ق Δ ق Δ ق مرشتم کرنے میں رقبہ ہمارے دائیں ہاتھ کی جانب ہوتا ہے اس قرار داد کے ساتھ ہم دیکھتے ہیں کہ خط میں نقطے (ب:ج) خواہ کسی ترتیب میں واقع ہوں

$$(ب:ج) = \Delta و اب: \Delta و ب ج$$

$$= \Delta ا و ب: \Delta ب و ج$$

نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم اپنی قرار داد کی رو سے یہ کہہ سکتے ہیں کہ

$$\Delta و اب + \Delta و ب ج = \Delta و ا ج$$

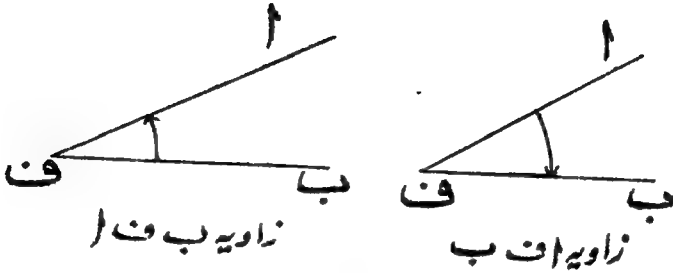
$$\Delta و اب - \Delta و ا ج = \Delta و ب ج$$

لیکن ہمیشہ یہ یاد رہے کہ (ب:ج) ہم خط ہیں۔

۳۳۔ نیز ہم جانتے ہیں کہ مثلث Δ ب کے رقبہ کی مقدار $\frac{1}{2}$ اور

Δ ب جب Δ و ب ہے اور بعض اوقات اس قیمت سے استفادہ کرنے میں سہولت ہوتی ہے۔ لیکن اگر ہم رقبوں Δ ب، Δ و ب ج کا مقابلہ ایک نسبت کے ذریعہ کر رہے ہوں تو ہم انکی بجائے

$$\frac{1}{2} \Delta و ب جب \Delta و ب اور \frac{1}{2} \Delta و ب جب \Delta و ب$$



درج نہیں کر سکتے الا انکہ علامتوں کی ایک اور قرارداد ہو جس سے ہماری نسبت کی نہ صرف مقدار بلکہ علامت بھی برقرار رہے۔
یہاں بھی صریح قرارداد یہ ہوگی کہ ان زاویوں کو مثبت خیال کیا جائے جو ایک سمت میں مرشم ہوں اور منفی خیال کیا جائے جو دوسری مخالف سمت میں مرشم ہوں۔ یہ قرارداد ہمارے مقصد کے لئے موثر ہوگی کیونکہ جب (ا-ب) = - جب لا۔

(31) اس صورت میں $\angle ا ف ب = - \angle ب ف ا$ زاویہ ا ف ب کو یوں سمجھنا چاہئے کہ جب خط ف ب محل ف ا سے شروع کر کے نقطہ ف کے گرد گردش کرتا ہے تو زاویہ ا ف ب حاصل ہوتا ہے اور جب خط ف ا محل ف ب سے شروع کر کے نقطہ ف کے گرد گردش کرتا ہے تو زاویہ ب ف ا حاصل ہوتا ہے یہ گردشیں مخالف سمتوں میں ہیں اور اس لئے مختلف علامت ہیں۔
زاویوں کی علامتوں سے متعلق اس قرارداد کے ساتھ ہم دفعہ ۳۲ کی شکلوں سے یہ استدلال کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ب}{ب ج} \times \frac{ا و}{ا و} = \frac{ا ب}{ب ج} \times \frac{ا و}{ب ج} = \frac{ا ب}{ب ج} \times \frac{ا و}{ب ج}$$

(خطوط و ا، ب، ج سب مثبت سمجھے گئے ہیں)

$$\frac{و ا}{و ج} = \frac{ج ب}{ج ب و ج}$$

اس طرح $\frac{ا ب}{ب ج}$ کی علامت استحالہ کے عمل میں برقرار رہتی ہے کیونکہ

جب ا و ب اور ج ب و ج ہم علامت یا مختلف علامت ہیں یہ موجب اس کے کہ ا ب اور ب ج ہم علامت یا مختلف علامت ہوں۔
طالب علم یہ دیکھ سکتا ہے کہ ہماری قرار داد بے فائدہ ہوتی اگر مثلث کا رقبہ زاویہ کی جیب پر منحصر ہونے کی بجائے راست اسکی جیب التمام پر منحصر ہوتا کیونکہ

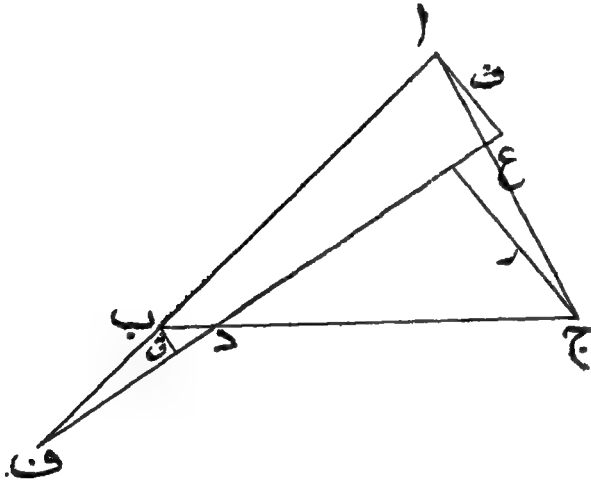
جم (ا) = جم ل + جم ل
۳۴۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے تین نقطوں کے ہم خط ہونیکے لئے شرط۔

ع ب ذیل مسئلہ جو مینلا اس کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے بہت اہم ہے۔

مثلث ا ب ج کے رأسوں ا ب ج کے مقابل کے اضلاع پر علی الترتیب نقاط د، ع، ف واقع ہیں۔
کافی اور ضروری شرط کہ یہ نقطے ہم خط ہوں یہ ہے کہ
ا ف × ب د × ج ع = ا ع × ج د × ب ف
بشرطیکہ ان خطوں کی علامتوں کا لحاظ رکھا جائے۔

یہ سب خط مثلث کے ضلعوں پر ہیں۔ ہم ان میں سے کسی کو مثبت یا منفی سمجھینگے بموجب اس کے کہ مثلث ہمارے بائیں یا دائیں ہو جبکہ ہم اس خط پر چلیں۔ ہم اول ثابت کریں گے کہ اگر د، ع، ف ہم خط ہیں تو اوپر کی شرط ضرور پوری ہوگی۔

(32)



فرض کرو کہ خط د، ع، ف پر 'ا، ب، ج' سے عمود ف، ق، ر ہیں اور فرض کرو کہ انہیں مثبت یا منفی شمار کیا گیا ہے بموجب اس کے کہ وہ خط د، ع، ف کی ایک یا دوسری جانب واقع ہوں۔ اس قرارداد کے ساتھ حاصل ہوتا ہے

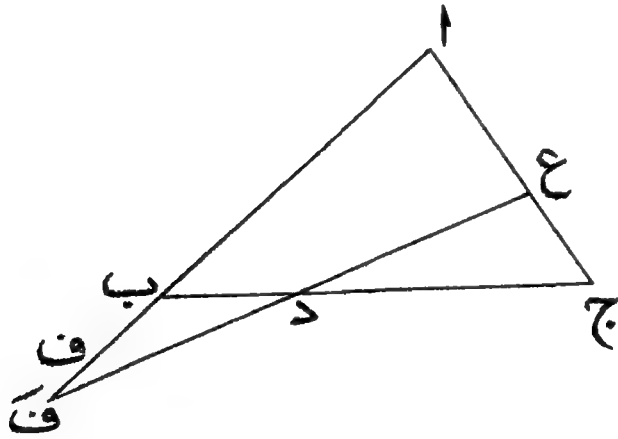
$$\frac{اف}{بف} = \frac{ن}{ق} = \frac{ب د}{ج د} = \frac{ق}{ر} = \frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ر}{ن}$$

$$\text{اس لئے} \quad ۱ = \frac{اف \times ب د \times ج ع}{بف \times ج د \times ا ع}$$

$$\text{یعنی} \quad اف \times ب د \times ج ع = بف \times ج د \times ا ع$$

اب فرض کرو کہ ضلعوں پر تین نقطے د، ع، ف ہیں ایسے کہ
 $اف \times ب د \times ج ع = ا ع \times ج د \times ب ف$
 تو ثابت کرنا ہے کہ د، ع، ف ہم خط ہونگے۔
 فرض کرو کہ خط د ع، اب کو ف پر قطع کرتا ہے۔
 $اف \times ب د \times ج ع = ا ع \times ج د \times ب ف$
 $\frac{اف}{ب ف} = \frac{ا ع}{ج ع}$

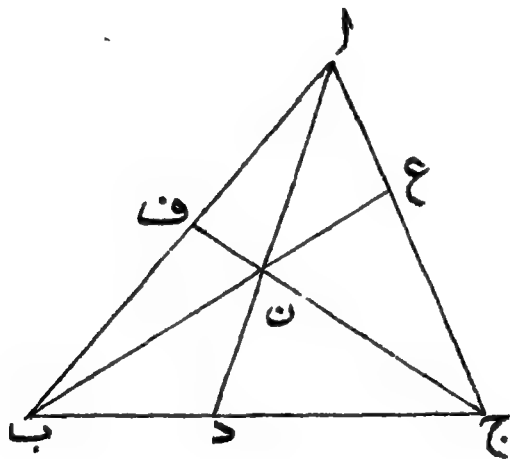
∴ (اف + ف ف) (ب ف) = اف (ب ف + ف ف) (38)
 ∴ ف ف (ب ف - اف) = - (اف - ف ف) ∴
 ف ف = - ∴
 ∴ ف، ف، ف پر منطبق ہوتا ہے۔
 پس ہمارا مسئلہ پوری طرح ثابت ہو چکا۔



۳۵۔ ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرنیوالے خطوط
 ہم نقطہ ہونے کے لئے شرط۔

حسب ذیل مسئلہ جو سیوا کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے بنیادی ہے۔
 ضروری اور کافی شرط کہ مثلث اب ج کے راسوں میں سے
 گزرنیوالے خط اد، ب'ع، ج'ف جو متقابل کے ضلعوں کو
 (34)
 د، ع، ف پر ملے ہیں ہم نقطہ ہوں یہ ہے کہ

ا ف × ب د × ج ع = ا ع × ج د × ب ف
 جس میں علامتوں کی قرار داد حسب دفعہ مابقی اختیار کی گئی ہے۔
 اول فرض کرو کہ خطوط اد، ب'ع، ج'ف نقطہ ن پر ملتے ہیں



تب رقبوں کی علامت کا لحاظ رکھنے سے

$$\frac{\text{ا ف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}}{\text{ب ف} \times \text{ج د} \times \text{ا ع}} = \frac{\text{ا ف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}}{\text{ب ف} \times \text{ج د} \times \text{ا ع}} = \frac{\text{ا ف} \times \text{ب د} \times \text{ج ع}}{\text{ب ف} \times \text{ج د} \times \text{ا ع}} =$$

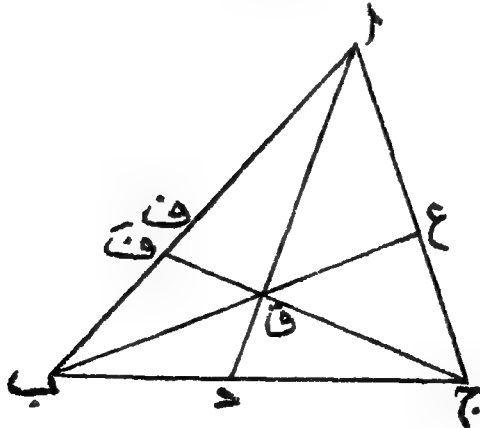
$$\frac{\text{ب د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}}{\text{ج د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ب د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}}{\text{ج د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ب د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}}{\text{ج د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ب د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}}{\text{ج د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ب د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}}{\text{ج د} \times \text{د ا} \times \text{ا ب}}$$

$$\frac{\text{ج ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}}{\text{ا ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ج ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}}{\text{ا ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ج ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}}{\text{ا ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ج ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}}{\text{ا ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ج ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}}{\text{ا ع} \times \text{ع ا} \times \text{ا ب}}$$

$$\frac{\text{ا ف} \times \text{ف ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا ع} \times \text{ع ج} \times \text{ج د}} = \frac{\text{ا ف} \times \text{ف ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا ع} \times \text{ع ج} \times \text{ج د}} = \frac{\text{ا ف} \times \text{ف ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا ع} \times \text{ع ج} \times \text{ج د}} = \frac{\text{ا ف} \times \text{ف ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا ع} \times \text{ع ج} \times \text{ج د}} = \frac{\text{ا ف} \times \text{ف ب} \times \text{ب ج}}{\text{ا ع} \times \text{ع ج} \times \text{ج د}}$$

اب فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر نقطے د، ع، ف ہیں ایسے کہ

ا ف × ف ب × ب ج = ا ع × ع ج × ج د × د ا × ا ب × ب ج



فرض کرو کہ اد، ب، ع نقطہ ق پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ج، ق، اب، ے، فن پر ملتے ہیں۔

$$\therefore \text{اف} \times \text{باد} \times \text{ج} \times \text{ع} = \text{اع} \times \text{ج} \times \text{د} \times \text{ب} \times \text{ف}$$

$$\therefore \frac{\text{اف}}{\text{ب ف}} = \frac{\text{اف}}{\text{ب ف}}$$

$$\therefore (\text{اف} + \text{ف ف}) (\text{ب ف}) = (\text{ب ف} + \text{ف ف}) (\text{اف})$$

$$\therefore \text{ف ف} (\text{ب ف} - \text{اف}) = \text{اف} (\text{ب ف} - \text{اف})$$

$$\therefore \text{ف ف} = \text{اف}$$

∴ فن، فن پر منطبق ہوتا ہے۔

پس ہمارا مسئلہ پوری طرح ثابت ہو چکا۔

۳۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک مثلث اب، ج کے ضلعوں پر تین

نقطے د، ع، فن، ف راسوں ا، ب، ج کے مقابل ہوں تو

$$\frac{\text{اف} \times \text{باد} \times \text{ج} \times \text{ع}}{\text{اع} \times \text{ج} \times \text{د} \times \text{ب} \times \text{ف}}$$

$$\frac{\text{ج ب ا ج ف ج ب ا د ج ب ج ب ع}}{\text{ج ب ا ب ع ج ب ج ا د ج ب ج ج ف}}$$

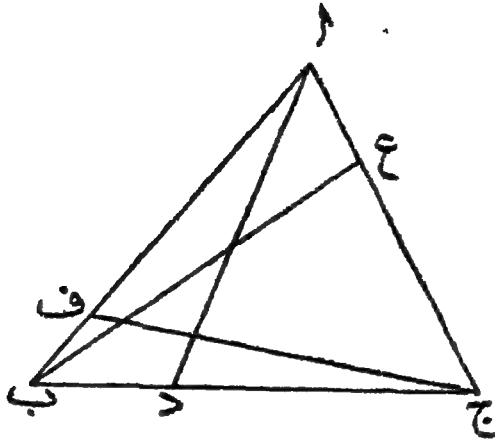
$$=$$

کیونکہ علامتوں سے متعلق قرار داد کے مطابق

$$\frac{\text{باد}}{\text{ج د}} = \frac{\frac{1}{4} \text{اب} \times \text{اد ج ب ا د}}{\frac{1}{4} \text{اج} \times \text{اد ج ب ج ا د}} = \frac{\text{اب} \times \text{ج ب ب ا د}}{\text{اج} \times \text{ج ب ج ا د}}$$

$$\frac{\text{باد}}{\text{ج د}} = \frac{\frac{1}{4} \text{اب} \times \text{اد ج ب ا د}}{\frac{1}{4} \text{اج} \times \text{اد ج ب ج ا د}} = \frac{\text{اب} \times \text{ج ب ب ا د}}{\text{اج} \times \text{ج ب ج ا د}}$$

جہاں اب، اج مثبت شمار کئے گئے ہیں۔



اسی طرح $\frac{اف}{بف} = \frac{اج}{بج}$ جب $\frac{اج}{بج} = \frac{اف}{بف}$

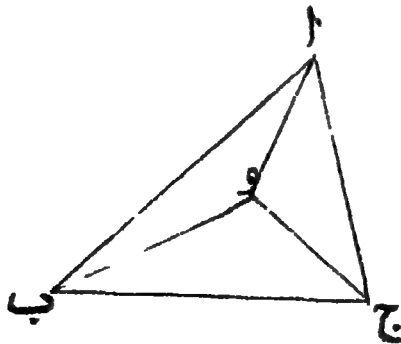
اور $\frac{ج ع}{ا ع} = \frac{ب ج}{ا ب} \times \frac{ج ب ج ع}{ج ب ا ب ع}$

$\frac{اف \times ب د \times ج ع}{ا ع \times ج د \times ب ف} = \frac{ج ب ا ج ف ب ا د ج ب ج ب ع}{ج ب ا ب ع ج ب ج ا د ج ب ج ب ع}$

نتیجہ صریح - ضروری اور کافی شرط کہ ا د ب ع ج ف ہم نقطہ ہوں یہ ہے کہ

(36)

$\frac{ج ب ا ج ف ب ا د ج ب ج ب ع}{ج ب ا ب ع ج ب ج ا د ج ب ج ب ع} = 1$

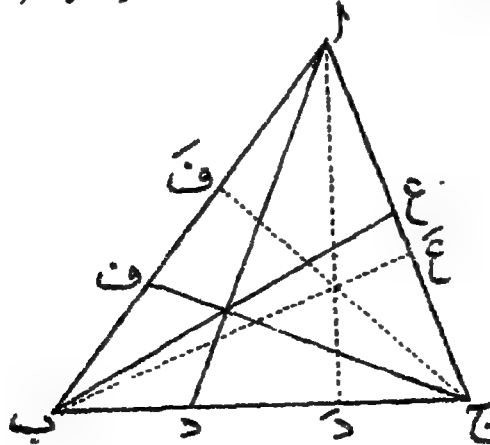


اگر نقطہ مشترک و ہوتویہ رشتہ شکل
 $\frac{\text{جب اب و جب ب ج و جب ج ا و}}{\text{جب ا ج و جب ج ب و جب ب ا و}} = 1$
 میں لکھا جا سکتا ہے جس کا یاد رکھنا آسان ہے۔

۳۔ متساوی الزاویہ مزدوج۔ دو خط 'ا د'، 'ا د' جو ایک مثلث کے
 رأس 'ا' میں سے اس طرح کھینچے گئے ہوں کہ
 $\frac{\text{جب ا د}}{\text{جب د ا ج}} = \frac{\text{جب د ا ج}}{\text{جب ج ا د}}$ (ج ا د نہیں)
 متساوی الزاویہ مزدوج کہلاتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر 'ا د'، 'ب ع'، 'ج ف' تین ہم نقطہ خط
 ہوں جو ایک مثلث 'ا ب ج' کے راسوں میں سے کھینچے
 گئے ہیں تو ان کے متساوی الزاویہ مزدوج بھی ہم نقطہ ہونگے۔

فرض کرو کہ متساوی الزاویہ مزدوج 'ا د'، 'ب ع'، 'ج ف' ہیں چونکہ
 $\frac{\text{جب ب ا د}}{\text{جب ج ا د}} = \frac{\text{جب د ا ج}}{\text{جب د ا ب}} = \frac{\text{جب ج ا د}}{\text{جب ب ا د}}$



$$\begin{aligned} \frac{\text{جب ج با ع}}{\text{جب ا ب ع}} &= \frac{\text{جب ا ب ع}}{\text{جب ج با ع}} \\ \frac{\text{جب ا ج ف}}{\text{جب ب ج ف}} &= \frac{\text{جب ب ج ف}}{\text{جب ا ج ف}} \quad \text{اور} \\ \frac{\text{جب ج ا د جب ا ب ع جب ب ج با ف}}{\text{جب ب ا د جب ج با ع جب ا ج ف}} &= \frac{\text{جب ج ا د جب ج با ع جب ب ج با ف}}{\text{جب ب ا د جب ج با ع جب ا ج ف}} \\ \frac{\text{جب ج ا د جب ج با ع جب ب ج با ف}}{\text{جب ج ا د جب ج با ع جب ب ج با ف}} &= 1 \end{aligned}$$

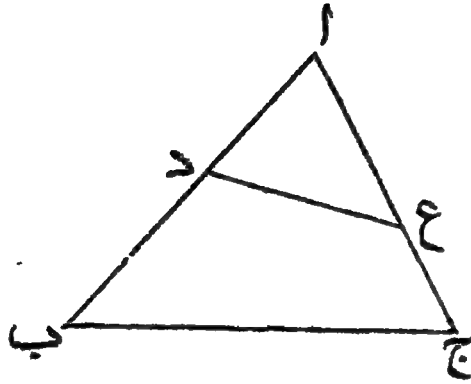
۳۸۔ کسی مثلث کے خطوط وسطی کے متساوی الزاویہ مزدوج اس کے شبہ وسطی کہلاتے ہیں۔ چونکہ خطوط وسطی ہم نقطہ ہوتے ہیں اسلئے شبہ وسطی بھی ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر شبہ وسطی تقاطع ہونے سے ہیں مثلث کا شبہ وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔

طالب علم معلوم کر لیا کہ کسی مثلث کے خطوط وسطی اور عمودوں کا ہم نقطہ ہونا اس باب کی شرطوں سے ظاہر ہے (دفعات ۳۵ اور ۳۶)۔ پہلے باب میں انہیں غیر تابع طریقوں کے ذریعہ ثابت کرنا مناسب سمجھا گیا تاکہ مرکز عمودی اور نقطہ وسطی کے دوسرے خواص بھی اخذ کئے جاسکیں۔

۳۹۔ ہم اس باب کو ختم کرنے سے پیشتر چند خاص خطوں کا ذکر کریں گے جو مثلث کے متوازی ہیں۔ فتح ہوتے ہیں ان خطوں کو بعض مصنفین ضلعوں کے ضد متوازی کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے، ضلعوں ا ب اور ا ج میں نقطے د اور ع ایسے ہیں کہ د ا د ع = ج ب ج ا اور اس لئے نیز د ا د ع = ج ب ج ا۔ خط د ع کو ج ج کا

ضد متوازی کہتے ہیں۔



یہ ظاہر ہے کہ د ب ج ع دائری ہے اور وہ سب خطوط جو ب ج کے ضد متوازی ہیں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔
یہ ثابت کرنا طالب علم پر چھوڑ دیا جاتا ہے کہ مثلث کا وہ شہو سوطی خط جو ا میں سے گذرتا ہے ب ج کے تمام ضد متوازیوں کی تنصیف کرتا ہے۔

مشقیں

۱۔ وہ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو اس کے حائط مرکز سے ملاتے ہیں مثلثوں کے عمودوں کے ساتھ منہوج ہوتے ہیں۔

۲۔ وہ خطوط جو ایک مثلث کے راسوں کو ان نقاط تک اس سے ملاتے ہیں جن پر اندرونی دائرہ اور باہری دائرے متقابلہ ضلعوں کو مس کرتے ہیں علی الترتیب ام نقطہ ہوتے ہیں۔

۳۔ د ب ج ایک مثلث ہے، راسوں 'ا'، 'ب'، 'ج' سے متقابل کے اضلاع پر عمود 'ا-د'، 'ب-ع'، 'ج-ف' کھینچے گئے ہیں۔ اگر 'ع'، 'ف'، 'د' پر علی الترتیب عمود 'ا-گ'، 'ب-ھ'، 'ج-ک' کھینچے جائیں تو

اگ، بھ، جگ ہم نقطہ ہوں گے۔

۴۔ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج اور ج ا کے وسطی نقطہ د اور ع ہیں اور ان کے نقاط تثلیث جو ب سے قریب ترین ہیں علی الترتیب ہھ اور گ ہیں۔ جگ، اد کو ل پر اور ج ص پر ب ع کو ن پر اور ب ل، اھ کو م پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب ع کا ایک نقطہ تثلیث ن ہے۔

۵۔ اگر مثلث ا ب ج کے مرکز عمودی سے زاویہ ا کے ناصفوں پر عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے پائین اور ب ج کا وسطی نقطہ ہم خط ہیں۔

۶۔ ایک مثلث کے جانبی دائرے ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو جن نقطوں پر مس کرتے ہیں انہیں علی الترتیب حرفوں د، ع، ف سے تعبیر کیا گیا ہے اور ان حرفوں پر لائحہ ۱، ۲، ۳ لگائے گئے ہیں بموجب اس کے کہ وہ ا، ب یا ج کے مقابل کے جانبی دائرہ سے متعلق ہوں۔ ب ع، ج ف، ا د نقطہ پ پر متقاطع ہوتے ہیں نیز ب ع، ا ج، ف ا نقطہ ق پر، ج ف، ا د، ب ج نقطہ ک پر، ف د، ا ج، ا نقطہ ما پر، د ع، ا ب نقطہ ی پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطوں ا، ب، پ، د، ق، ا اور نقاط لا، ما، ی کے گروہ علی الترتیب ہم خط ہیں۔

۷۔ ایک دائرہ کے نقطوں ا اور ب پر کے متوازی مماس اس دائرہ کے نقطہ ع پر کے مماس سے علی الترتیب نقطوں ج اور د پر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا، ب، ج اور دہ خط جو ا ع اور ب ع کے وسطی نقطوں کو ملاتا ہے ہم نقطہ ہیں۔

۸۔ کسی مثلث ا ب ج کے راسوں سے خطوط ا د، ب ع، ج ف کھینچے گئے ہیں جو متقابلہ ضلعوں کو علی الترتیب د، ع، ف پر

قطع کرتے ہیں اور متقابلہ ضلعوں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں جبکہ انہیں
ثلث کے گرد ایک ہی سمت میں پٹائش کیا گیا ہو۔ خطوط (د، ب، ع،
ج، ف ایک ثلث (ا، ب، ج) بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ا ب \times ب ج \times ج ا}{ع ا \times ب ف \times ج د} = \frac{ا ج \times ج ب \times ب ا}{ع ا \times ب د \times ج ف}$$

$$\frac{ب ج \times ج ا \times ا ب}{د ا \times ب ع \times ج ف} =$$

۹۔ ایک ثلث کے سر شیبہ پر لی نقطہ میں سے ہر ضلع کے سر ضد متوازی

خط کھینچے گئے ہیں جو دوسرے دو ضلعوں کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس طرح
جو چہ نقطے حاصل ہوتے ہیں مشابہہ یعنی نقطے سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔

[ان چہ نقطوں میں سے گزرتی اے دائرہ کو جیب التمامی دائرہ

اسکی اس خاصیت کی بناء پر کہا گیا ہے کہ وہ مقطع جو یہ دائرہ ضلعوں پر
قطع کرتا ہے متقابلہ زاویوں کی جیوب التمام کے متناسب ہوتے ہیں اس
خاصیت کی تصدیق طالب علم خود کر سکتا ہے۔]

۱۰۔ ایک ثلث کے مشابہہ وسطی نقطے سے ہر ضلع کے متوازی خطوط کھینچے
گئے ہیں جو دوسرے دو ضلعوں کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ چہ نقطے
جو اس طرح حاصل ہوتے ہیں اس خط کے نقطہ وسطی سے مساوی فاصلہ پر
ہوتے ہیں جو مشابہہ وسطی نقطہ کو عاقل مرکز سے ملاتا ہے۔

[وہ دائرہ جو ان چہ نقطوں میں سے گزرتا ہے لیموائی دائرہ کہلاتا ہے
دیکھو لاکلان کی کتاب Modern pure geometry وغیرہ ۱۳۱۔]

۱۱۔ ایک ثلث (ا، ب، ج) کے راسوں میں سے تین ہم نقطہ خطوط
(د، ب، ع، ج، ف) کھینچے گئے ہیں جو متقابلہ ضلعوں سے نقطوں

د، ع، ف پر ملتے ہیں۔ مثلث د ع ف کا حاملہ دائرہ مثلث
اب ج کے ضلعوں کو گزرنے والے نقطوں د، ع، ف پر قطع کرتا ہے۔ (۹۰)
ثابت کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف ہم نقطہ ہیں۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے اسکے حاملہ دائرہ کے
ماس متقابلہ ضلعوں کے تین نقطوں پر ملتے ہیں جو ہم خط ہیں۔

۱۳۔ اگر ایک مثلث ا، ب، ج کے راسوں میں سے خطوط ا، د،
ب، ع، ج، ف کھینچے گئے ہوں جو متقابلہ ضلعوں کو د، ع، ف پر
ملتے ہیں اور ہم نقطہ ہیں اور اگر ا، ب، ج کے متقابلہ ضلعوں میں نقطے د،
ع، ف ایسے لئے گئے ہوں کہ د، د اور ب، ج، ع، ع اور ج، ا،
ف، ف اور ا، ب علی الترتیب ایک ہی وسطی نقطہ رکھتے ہیں تو
ثابت کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف ہم نقطہ ہیں۔

۱۴۔ اگر ایک مثلث ا، ب، ج کے مشبہ وسطی نقطہ سے
مثلث کے ضلعوں پر عمود سے د، ع، ف دالے جائیں تو
ثابت کرو کہ د، ع، ف مثلث د ع ف کا وسطی نقطہ ہوگا۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ وہ مثلث جو ایک مثلث کے راسوں کو مشبہ وسطی
نقطہ سے ملانے سے بنتے ہیں مثلث کے ضلعوں کی نسبت مشابہ میں
ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک مثلث ا، ب، ج کے ضلعوں ب، ج، ج، ا،
ا، ب کو داخلاً نقطوں ا، ب، ج سے اس طور پر تقسیم کیا گیا ہے کہ

$$ب : ا = ج : ب = ا : ج = ا : ج : ج : ب$$

نیز ب، ج محدودہ ا، ب، ج کو خارجاً نقطہ ا پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ب : ا = ج : ا = ج : ا : ا : ب$$

چوتھا باب

تفصیل

(41)

۴۰۔ اگر نضاء میں کوئی نقطہ ط ہو اور کوئی دوسرا نقطہ ا ہو اور اگر ط ا، محدودہ بشرط ضرورت کسی دئے ہوئے مستوی میں سے (ا) پر لے تو ہم کہتے ہیں کہ ا کا ظل مستوی میں پر اس ط کے ذریعہ (ا) ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ ایک خط مستقیم کا ظل کسی مستوی میں پر ایک خط مستقیم ہو گا یہ خط مستوی میں اور اس مستوی کا خط تقاطع ہے جس میں ط اور دیا ہوا خط واقع ہے۔

اگر ط میں سے اور ایک خاص خط میں سے گزرنے والا مستوی مستوی میں کے متوازی ہو تو یہ خط مستوی میں پر لاتنا ہی پر تظلیل ہو گا۔ وہ خط جو مستوی میں پر اس طرح حاصل ہوتا ہے اس مستوی کا لاتنا ہی کا خط کہلاتا ہے۔

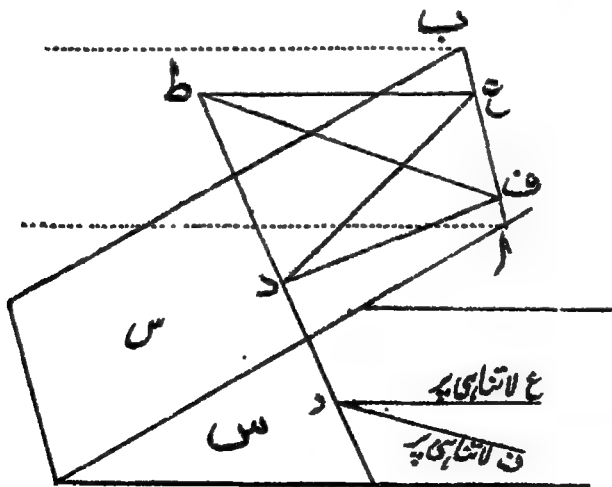
۴۱۔ اب فرض کرو کہ ہم ایک مستوی میں سے دو نقطوں کے ظل دوسرے مستوی میں پر بذریعہ اس ط لے رہے ہیں۔

فرض کرو کہ مستوی میں کے متوازی اور ط میں سے گزرنی والا ایک مستوی مستوی میں کو خط اب میں قطع کرتا ہے۔

یہ خط 'ا ب' مستوی سے پرالتناہی پر مائل ہوگا اور اسلئے
ا ب کو مستوی سے پر خط منعدم کہتے ہیں۔

یہ خط منعدم صرف کئی مستویوں سے اور اس کے خط تقاطع کے
متوازی ہوگا اس خط تقاطع کو تفلیس کا محور کہتے ہیں۔
۴۲۔ اب فرض کرو کہ مستوی سے میں ایک زاویہ ع د ف
ہے اور فرض کرو کہ اسکی سابقین د ع اور د ف خط منعدم (ا ب)
کو ع اور ف میں قطع کرتی ہیں تو زاویہ ع د ف مستوی
سے پر مقدار ع ط ف کے ایک زاویہ میں مائل ہوگا۔
(۴۲) کیونکہ فرض کرو کہ مستوی ط د ع مستوی سے کو خط د ع
میں قطع کرتا ہے۔

اب چونکہ مستوی ط ع ف مستوی سے کے متوازی
ہے اسلئے مستوی ط د ع کے ساتھ ان مستویوں کے خطوط تقاطع
متوازی ہیں یعنی د ع ط ع کے متوازی ہے۔

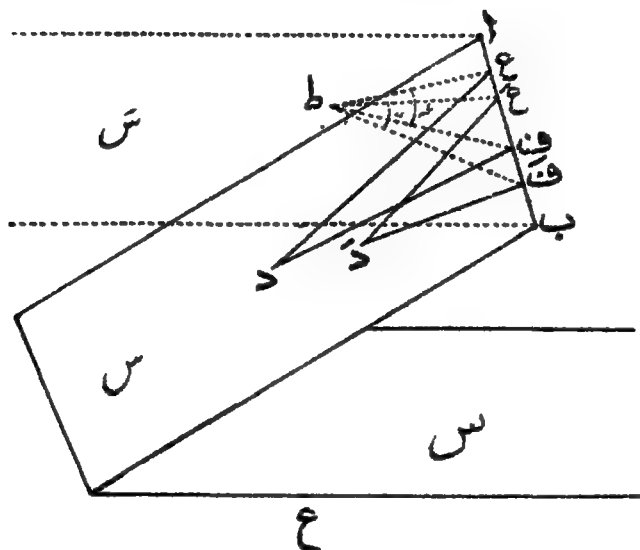


اسی طرح د ف، ط ف کے متوازی ہے۔
 اس لئے $\angle ع د ف = \angle ع ط ف$
 پس ہم دیکھتے ہیں کہ مستوی س کا کوئی زاویہ مستوی
 س پر ایک زاویہ میں منظر ہو تا ہے جس کی مقدار اس
 زاویہ کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے جو ط پر خط منعدم کے
 اس حصہ کے محاذی بنتا ہے جو دئے ہوئے زاویہ کی ساقوں سے
 منقطع ہوتا ہے۔

۴۳۔ مسئلہ۔ تفہیم کے رأس ط کا درست انتخاب
 کر کے مستوی س کے کسی دئے ہوئے خط کو لاتنا ہی منظر
 کیا جاسکتا ہے اور مستوی س کے دو دئے ہوئے زاویوں کو
 وی ہوئی مقدار کے زاویوں میں ایک مناسب طور پر انتخاب
 کئے ہوئے مستوی س پر منظر کیا جاسکتا ہے۔
 فرض کرو کہ اب دیا ہوا خط ہے۔ (اب میں سے کوئی مستوی

س کھینچو۔ فرض کرو کہ مستوی س کو مستوی س کے متوازی لیا گیا ہے۔
 فرض کرو کہ مستوی س میں $\angle ع د ف$ ، $\angle ع د ف$ دوازا
 ہیں جنہیں علی الترتیب مقدار عہ اور بہ کے زاویوں میں منظر کرنا ہے۔
 فرض کرو کہ $\angle ع ف$ ، $\angle ع ف$ خط اب پر واقع ہیں۔
 مستوی س میں $\angle ع ف$ ، $\angle ع ف$ پر دائروں کے قطعات
 کھینچو جنکے زاویے علی الترتیب عہ اور بہ کے مساوی ہوں۔ فرض کرو کہ

یہ قطعات ایک دوسرے کو نقطہ ط پر ملتے ہیں۔
اب اگر ط کو تفصیل کے راس کے طور پر لیا جائے تو اب لائن
مطلل ہوگا اور زاویہ \angle د ف، \angle ع د ف، علی الترتیب مقدار
عہ اور بہ کے زاویوں میں مطلل ہوں گے (دفعہ ۴۲)



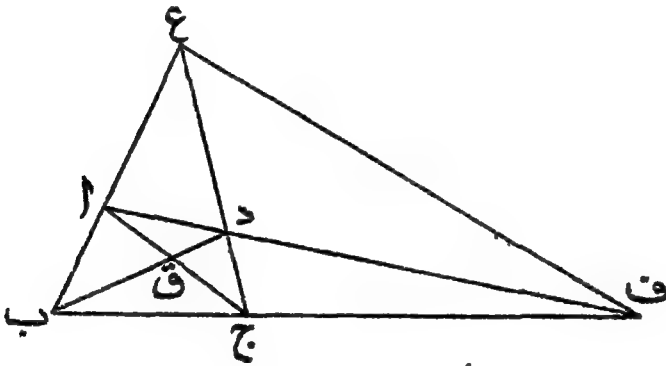
نتیجہ صریح ۱۔ کسی مثلث کو ایک متساوی الاضلاع مثلث میں منتقل کیا جاسکتا ہے۔

کیونکہ اگر ہم اس مثلث کے دو زاویوں کو 90° کے زاویوں میں منظم کریں تو تیسرا زاویہ بھی 90° کے ایک زاویہ میں منظم ہوگا کیونکہ مثلث کے تین زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع کو ایک مربع میں
مُظَلِّل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ (ب ج د ذواربعۃ الاضلاع ہے۔ فرض کرو کہ
 ع ف اسکا تیسرا وتر ہے یعنی وہ خط جو متقابلہ اضلاع کے نقاط تقاطع
 کو ملاتا ہے۔ فرض کرو کہ (ج اور ب د، ق میں متقاطع ہوتے ہیں۔
 اب اگر ہم ع ف کو لاتنا ہی پر منظر کریں اور ساتھ ہی زاویوں
 ب ا د اور ک ب ق کو قائمہ زاویوں میں منظر کریں تو ذواربعۃ الاضلاع
 ایک مربع میں منظر ہوگا۔

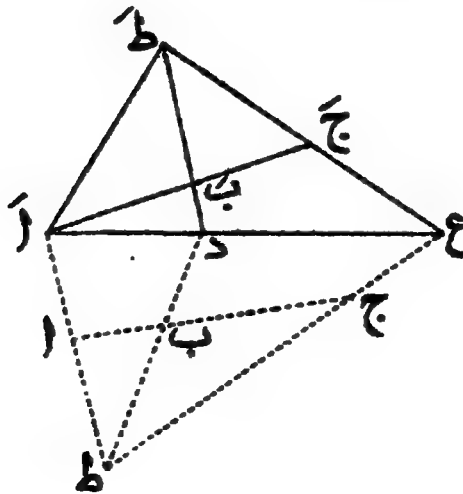
(44)



کیونکہ ع ف کی لاتنا ہی پر تفصیل اس امر کی ضمانت ہے کہ ظل
 ایک متوازی الاضلاع ہو اور پھر زاویہ ب ا د کی ایک قائمہ میں تفصیل
 اس متوازی الاضلاع کو مستطیل بنادیتی ہے اور زاویہ ا ق ب کی
 ایک قائمہ زاویہ میں تفصیل اس مستطیل کو ایک مربع بنادیتی ہے۔
 ۴۴۔ یہ ممکن ہے کہ پہلے دفعہ کے خطوط د ع، د ع میں سے ایک
 خط (ب کے جسے لاتنا ہی پر منظر کرنا ہے) متوازی ہو۔ فرض کرو کہ
 د ع، ا ب کے متوازی ہے۔ اس صورت میں مستوی میں سے ایک
 خط ف ط ایسا کھینچنا ہوگا کہ زاویہ ع ف ط، عم کا متمم ہو۔ تفصیل کا
 راس ط، خط ف ط اور ع ف پر دائرہ کے نقطہ کا نقطہ تقاطع ہوگا

اگر د ع بھی اب کے متوازی ہے تو نقطہ ط اوپر حاصل شدہ خط ف ط اور دوسرے خط ف ط کا نقطہ تقاطع ہوگا چنانچہ ف ط اس طور پر کھینچا گیا ہے کہ زاویہ ع ف ط ' یہ کا منہم ہے۔ ۴۵۔ نیز یہ بھی ممکن ہے کہ دفعہ ۳ کے مسئلہ میں ا ع ف ع ف پر دائروں کے جو قطعات کھینچے جائیں وہ کسی حقیقی نقطہ پر متقاطع نہ ہوں اس صورت میں ط ایک خیالی نقطہ ہوگا یعنی ایک ایسا نقطہ جو جبری طور پر اہم ہو لیکن شکل میں آنکھ کے سامنے دکھایا نہ جاسکے۔ خیالی نقطوں اور خیالی خطوں کا تخیل جو ہم علم ہندسہ تحلیلی سے اپنی موجودہ بحث میں لے رہے ہیں ہمارے مضمون میں بہت فائدہ مند ہے۔

۴۶۔ مسئلہ۔ تین نقطوں کی ایک سمت کو فضاء کے کسی (45) اور تین نقطوں کی ایک سمت میں منظر کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ تین دے ہوئے ہم خط نقطے 'ا' 'ب' 'ج' ہیں اور 'د' 'ب' 'ج' تین دوسرے نقطے ہیں جن کا قبل الذکر نقطوں کے ساتھ ہم مستوی ہونا ضروری نہیں ہے۔



۱۔ ا کو ملاؤ۔
 ۱۔ ا میں کوئی نقطہ ط لو۔
 ط ب، ط ج کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ ایک خط ا د ع
 کو جو ا سے مستوی ط ا ج میں کھینچا گیا ہے نقطوں د اور ع پر
 قطع کرتے ہیں۔

د ب، ع ج کو ملاؤ۔ یہ ایک سطح مستوی میں ہیں یعنی
 اُس مستوی میں جس میں خطوط ا ج اور ا ع واقع ہیں۔
 فرض کرو کہ د ب اور ع ج، ط پر ملتے ہیں۔ ط (ا کو ملاؤ)
 اب اس ط کے ذریعہ (ب، ج کو) د، ع میں منطلل
 کیا جاسکتا ہے اور پھر (د، ع کو) اس ط کے ذریعہ (ب، ج
 میں منطلل کیا جاسکتا ہے۔

پس ہمارا مسئلہ ثابت ہو چکا۔
 ۴۷۔ طالب علم کو یہ سمجھ لینا چاہئے کہ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک سمت
 دوسری سمت میں منطلل ہو سکتی ہے تو یہ غمروبی نہیں ہے کہ ایک سمت
 دوسری سمت میں صرف ایک واحد تطلیل سے منطلل ہو سکے بلکہ ہم
 ایک سمت سے دوسری سمت تک متواتر تطلیلوں کے ذریعہ پہنچ سکتے ہیں
 چار نقطوں کی ایک سمت بالعموم فضاء کے کسی اور چار نقطوں کی
 ایک سمت میں منطلل نہیں ہو سکتی ہم آیندہ باب میں یہ دکھائیں گے کہ
 اس کے لئے کونسی شرط پوری ہونی چاہئے۔

(46)

مشقیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایک مستوی س کے متوازی خطوں کا ایک نظام دوسرے
 مستوی پر خطوں کے ایک نظام میں منطلل ہوگا جو ایک ہی نقطہ میں سے گذرینگے۔
 ۲۔ دو ایسے زاوے جنکی ساقیں خط منعدم سے ایک ہی نقطوں پر ملتی ہو

ایسے زاویوں میں منظر ہو گئے جو ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

۳۔ ثابت کرو کہ بالعموم تین زاویے ایک ہی مقدار کے زاویوں

میں منظر ہو سکتے ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کو اس طور پر منظر کیا جاسکتا ہے کہ اسکے

مستوی کا کوئی خط لاتساہی پر منظر ہو اور اس کے راسوں میں سے گزرنیوالے

تین دئے ہوئے ہم نقطہ خطوط میں مثلث کے عمود ہوں۔

۵۔ ایک شکل کے ذریعہ سمجھاؤ کہ کس طرح ایک نقطہ میں جو ایک

خوف قی پر واقع ہے لیکن حصہ قی سے باہر ہے ایک نقطہ

میں منظر کیا جاسکتا ہے جو قی اور قی کے درمیان واقع ہو جہاں قی

اور قی، قی اور قی کے منظر ہیں۔

۶۔ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب

میں علی الترتیب کوئی تین نقطے ا، ب، ج ہیں۔ ب ج، ج ا اور

اور ب ج، ج ا پر متقاطع ہوتے ہیں۔ ج ا اور ج ا، گ پر

اور ا ب، ا ب، ہ پر۔ نیز ف ہ اور ب ب، ہ پر

متقاطع ہوتے ہیں اور ف گ اور ج ج، ن پر۔

ثابت کرو کہ ہ گ، ن ہ اور ب ج ہم نقطہ ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کو اس طور پر منظر کیا جاسکتا ہے کہ

اس کے راسوں میں سے گزرنیوالے تین دئے ہوئے ہم نقطہ خطوط منظر

میں مثلث کے خطوط وسطی ہو جائیں۔

۸۔ اگر ا، ب، ب، ج، ج، تین ہم نقطہ خوف ہوں جو ایک

مثلث ا ب ج کے راسوں میں سے کھینچے گئے ہیں اور جو راسوں کے مقابل کے

اضلاع سے ا، ب، ج، پر ملتے ہیں اور اگر ب ج، ج ب، ب ج سے

۱۔ پرلے: ج، ا، ج، ا سے ب، پرلے اور ا، ب، ا ب سے ج، پرلے تو ا، ب، ج ہم خط ہونگے۔

[ہم نقطہ خطوں کو خطوط وسطی میں منظر کر دو]۔
 ۹۔ اگر ایک مثلث کو ایک مستوی سے دوسرے مستوی پر منظر کیا جائے تو متناظر ضلعوں کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہونگے۔

(*)

پانچواں باب

چلیپی نسبتیں

(۹۶)

۴۸۔ تعریف۔ اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' نقطوں کی ایک سمت ہو تو نسبت $\frac{ا \times ج}{ب \times د}$ کو ان چار نقطوں کی ایک چلیپی نسبت کہتے ہیں اور اسے سہولت کی خاطر (ا ب ج د) کے ذریعہ تعبیر کرتے ہیں اس میں حرفوں کی ترتیب وہی ہے جو چلیپی نسبت کے شمار کنندہ میں ان کی ترتیب ہے۔

بعض مصنف چلیپی نسبتوں کو غیر موسیقی نسبتیں کہتے ہیں۔ لیکن یہ اصطلاح استعمال کرنی مناسب نہیں اور اس سے گریز کرنا ہی بہتر ہے۔ کیونکہ "غیر موسیقی" کے معنی "موسیقی نہیں" کے نکلتے ہیں حالانکہ ایک چلیپی نسبت موسیقی ہو سکتی ہے یعنی وہ ایک موسیقی سمت کی چلیپی نسبت ہو سکتی ہے۔ طالب علم ساتویں باب میں اس تکتہ کو اچھی طرح سمجھ جائے گا۔

۴۹۔ چار نقطوں کی سمت کی ایک چلیپی نسبت کے لوازم یہ ہیں (۱) ہر حرف شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں میں صرف ایک بار واقع ہوتا ہے (۲) نسب نامہ کے عناصر پہلے اور آخری حرفوں کو ایک ساتھ

اور تیسرے اور دوسرے حرفوں کو ایک ساتھ لکھنے سے اور صرف اس مخصوص ترتیب میں لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

اب $\frac{د ج \times د}{د ب \times ج}$ چلیبی نسبت نہیں ہے بلکہ ایک چلیبی نسبت کی منفی قیمت ہے کیونکہ یہ

$$= - \frac{د ج \times د}{د ب \times ج} = - (د ج د)$$

با $\frac{د ج \times د}{د ب \times ج}$ اگرچہ ظاہر چلیبی نسبت معلوم نہیں ہوتی

لیکن ترتیب مکرر سے وہ چلیبی نسبت ہو جاتی ہے کیونکہ وہ

$$= \frac{د ج \times د}{د ب \times ج} = (د ج د)$$

اب چونکہ چار حرفوں کی ترتیبیں چوبیس ہوتی ہیں جبکہ سب کو ایک ساتھ لیا جائے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ چار نقطوں کی ایک سمت سے جو چلیبی نسبتیں بنائی جاسکتی ہیں ان کی تعداد چوبیس ہے۔

(48)

۵۰۔ مسئلہ۔ چار نقطوں کی ایک سمت کی چوبیس چلیبی نسبتیں چہ چلیبی نسبتوں کے مماثل ہوتی ہیں اور یہ سب انہیں سے کسی ایک چلیبی نسبت کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں۔
فرض کرو کہ $(د ج د) = ل$



اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ ایک چلیبی نسبت کے حروف میں سے دو کو ایک ساتھ تبدیل کر دیا جائے تو چلیبی نسبت نہیں بدلتی، چنانچہ

$$(ب ا د ج) = \frac{ب ا \times د ج}{د ا \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = (ا ب ج د)$$

$$(ج د ا ب) = \frac{ج د \times ا ب}{ج ب \times ا د} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = (ا ب ج د)$$

$$(د ج ب ا) = \frac{د ج \times ب ا}{د ا \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = (ا ب ج د)$$

اس لئے

$$(ا ب ج د) = (ب ا د ج) = (ج د ا ب) = (د ج ب ا)$$

لہذا (۱)

ثانیاً ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم یا تو پہلے اور تیسرے حروف کو باہم یا دوسرے اور چوتھے حروف کو باہم تبدیل کریں، تو چلیبی نسبت الٹ جاتی ہے چنانچہ

$$(ا د ج ب) = (ب ج د ا) = (ج ب ا د) = (د ا ب ج)$$

$$\frac{۱}{۲} = \dots\dots\dots (۲)$$

یہ چلیبی نسبتیں (۱) کی نسبتوں میں دوسرے اور چوتھے حروف کے باہمی تبادلے سے حاصل کی گئی ہیں، یہی نتیجہ حاصل ہو گا اگر ہم پہلے اور تیسرے حروف کو باہم تبدیل کریں۔

مثلاً چونکہ دفعہ ۳۱ کی رو سے

$$ا ب \times ج د + د ا \times ج ب + ج ا \times د ب = ۰$$

$$\therefore \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} + ۱ - \frac{ج ا \times د ب}{ا د \times ج ب} = ۰$$

$$\text{۱۔ لہ} = \frac{\text{ج ا} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ب ج}} = \frac{\text{ج ا} \times \text{ب د}}{\text{ا د} \times \text{ب ج}} = (\text{ج ب د})$$

(49) اس طرح دوسرے اور تیسرے حروف کے باہمی تبادلہ سے لہ، ا، ب میں بدلتا ہے۔ پہلے اور چوتھے حروف کو باہم تبدیل کرنے سے بھی ایسی نتیجہ حاصل ہوگا۔

اس لئے (۱) سے

$$(\text{ج ب د}) = (\text{ب د ا}) = (\text{ا د ج}) = (\text{ج ا ب})$$

$$= (\text{ا۔ لہ}) \dots \dots \dots (۳)$$

اور پھر (۳) میں دوسرے اور چوتھے حروف کے باہمی تبادلہ کے ذریعہ حاصل ہوگا

$$(\text{ا د ج}) = (\text{ب ج ا}) = (\text{ج ب د}) = (\text{ا ج ب})$$

$$= \frac{1}{\text{ا۔ لہ}} \dots \dots \dots (۴)$$

ان میں دوسرے اور تیسرے حروف کے باہمی تبادلہ سے حاصل ہوگا
(ا ب د ج) = (ب ا ج د) = (ج د ب ا) = (د ج ا ب)

$$= \frac{1}{\text{ا۔ لہ}} = \frac{1}{\text{ا۔ لہ}} \dots \dots \dots (۵)$$

اور اب دوسرے اور چوتھے حروف کے باہمی تبادلہ سے حاصل ہوگا

$$(\text{ا ج ب د}) = (\text{ب د ج ا}) = (\text{ج ا د ب}) = (\text{د ب ا ج})$$

$$= \frac{1}{\text{ا۔ لہ}} \dots \dots \dots (۶)$$

اس طرح ہم نے تمام چلیپی نسبتوں کو لہ کی رقوم میں بیان کر دیا اور ہم دیکھتے ہیں کہ اگر چار ہم خط نقطوں کی ایک چلیپی نسبت دوسرے چار ہم خط نقطوں کی ایک چلیپی نسبت کے مساوی ہو تو پہلی نسبت کی ہر چلیپی نسبت دوسری نسبت کی متنظر چلیپی نسبت کے مساوی ہوگی۔

ایسی دو سمتیں ہم چلیبہ کہی جاسکتی ہیں۔

۵۱۔ مسئلہ۔ اگر ا، ب، ج تین ہم خط نقطے ہوں اور ان کے خط میں د، ع ایسے دوسرے نقطے ہوں کہ

$$(ا ب ج د) = (ا ب ج ع)$$

تو د، ع پر منطبق ہونا چاہئے۔

$$\text{چونکہ } \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{ا ب \times ج ع}{ا ع \times ج ب}$$

$$\therefore ا د \times ج د = ا ع \times ج ب$$

$$\therefore (ا د + د ج) د = ا د (ا د + د ج)$$

$$\therefore د (ا د - د ج) = ۰$$

$$\therefore د \times ا ج = ۰$$

$$\therefore د = ۰ \text{ کیونکہ } ا ج \neq ۰$$

یعنی د اور ع منطبق ہوتے ہیں۔

۵۲۔ مسئلہ۔ چار نقطوں کی ایک سمت، کسی مستوی پر (50)

اپنے ظل کے ساتھ ہم چلیبہ ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ سمت ا، ب، ج د کو اس ط کے ذریعہ ا، ب، ج د میں منطلل کیا گیا ہے۔ ا ب

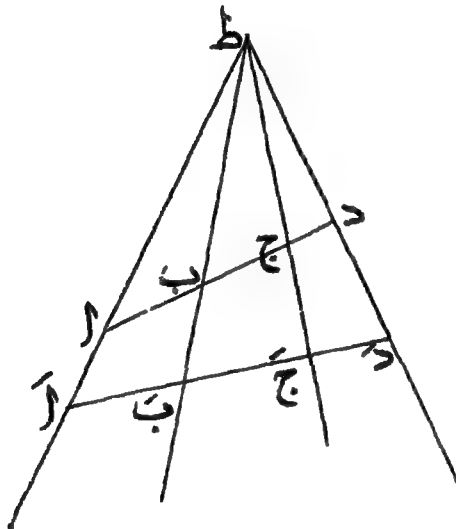
$$\frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{ا ط \times ب د}{ا ط \times ج د} \times \frac{ا ج ط د}{ا ج ط ب}$$

علامتوں کا لحاظ کرتے،

$$\frac{\frac{1}{4} ط \times ط ب جب ا ط ب}{\frac{1}{4} ط \times ط د جب ا ط د} = \frac{\frac{1}{4} ط ج \times ط د جب ج ط د}{\frac{1}{4} ط ج \times ط ب جب ج ط ب}$$

زاویوں کی علامتوں کا لحاظ کرتے،

$$\frac{جب ا ط ب جب ج ط د}{جب ا ط د جب ج ط ب} =$$



شکل (۱)

اسی طرح

$$\frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب} = \frac{جب ا ط ب \times جب ج ط د}{جب ا ط د \times جب ج ط ب}$$

اب ان تمام صورتوں میں جو پیدا ہو سکتی ہیں

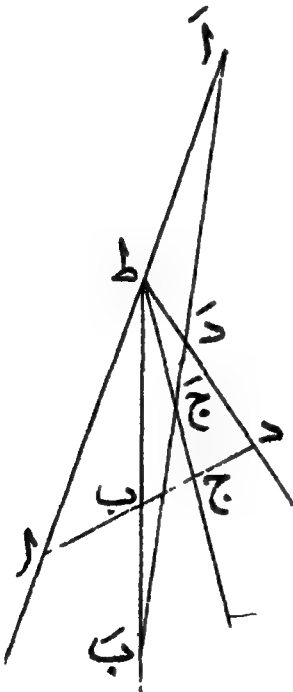
$$\frac{\text{جب } \text{ا ط ب} \text{ جب } \text{ج ط د}}{\text{جب } \text{ا ط د} \text{ جب } \text{ج ط ب}} = \frac{\text{جب } \text{ا ط ب} \text{ جب } \text{ج ط د}}{\text{جب } \text{ا ط د} \text{ جب } \text{ج ط ب}}$$

(۵۱)

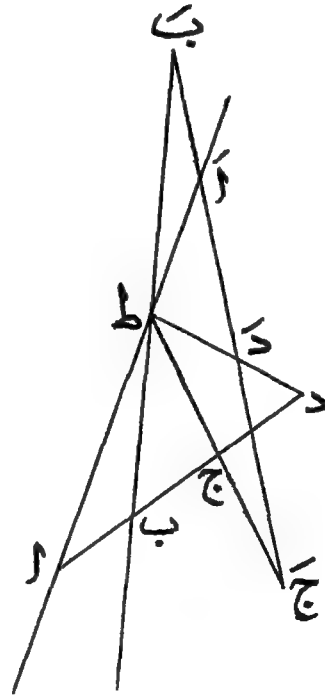
شکل (۱) کی صورت میں صاف ظاہر ہے۔
شکل (۲) میں

$$\text{جب } \text{ا ط ب} = \text{جب } \text{ب ط ا} \text{ کیونکہ یہ زاوے متساوی ہیں}$$

$$\begin{aligned} &= \text{جب } \text{ا ط ب} \\ \text{اور جب } \text{ا ط د} &= \text{جب } \text{د ط ا} = \text{جب } \text{ا ط د} \end{aligned}$$



شکل (۲)



شکل (۳)

نیز جب ج ط د = جب ج ط د

اور جب ج ط ب = جب ط ب

شکل (۳) میں

جب ا ط ب = جب ا ط ب

جب ج ط د = جب ج ط د

جب ا ط د = جب د ط ا = - جب ا ط د

جب ج ط ب = جب ب ط ج = - جب ج ط ب

اس طرح ہر صورت میں

(ا ب ج د) = (ا ب ج د)

۵۳ - فرض کرو کہ ایک مستوی میں متعدد خطوط ایک نقطہ ط پر ملتے

ہیں، ہم کہتے ہیں کہ یہ خطوط ایک پنسل بناتے ہیں اور پنسل کا ہر تریبی

خط کرن کہلاتا ہے۔ ط کو پنسل کا رأس کہتے ہیں۔

کوئی خط مستقیم جو کرنوں کے مستوی میں ہو اور انہیں قطع کرے

پنسل کا قاطع کہلاتا ہے۔

گزشتہ دفعہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ط ن، ط ن، ط ن، ط ن

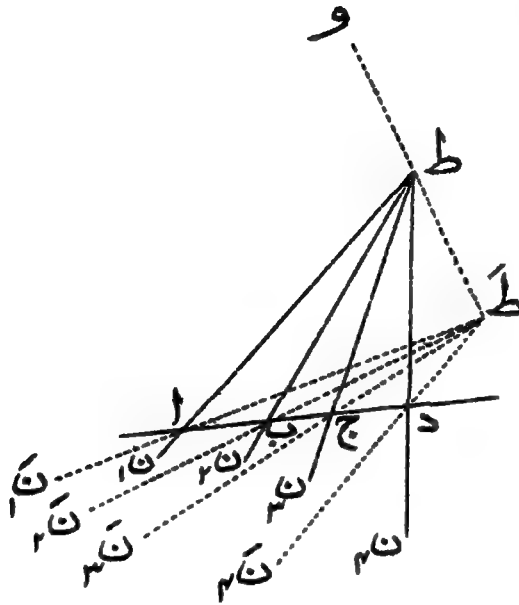
ایک پنسل بنائیں اور کوئی قاطع پنسل کی کرنوں کو (ا ب، ج د) میں

قطع کرے تو (ا ب ج د) اس مخصوص پنسل کے لئے مستقل ہوگا یعنی

وہ اس مخصوص قاطع پر منحصر نہیں ہوگا۔

اس مستقل چلپی نسبت کو ترقیم ط (ن ن، ن ن، ن ن) سے ظاہر

کرنے میں سہولت ہوگی۔



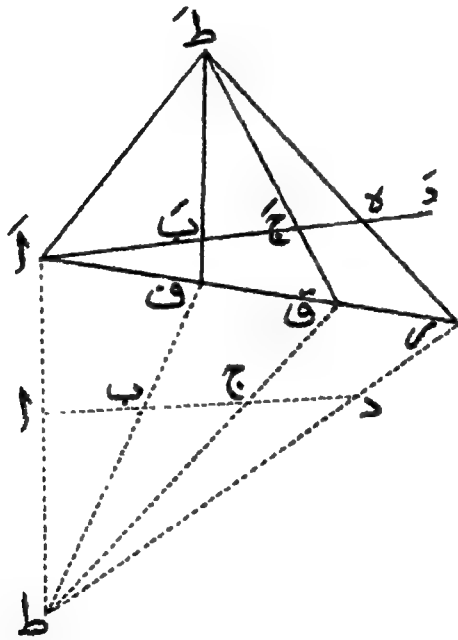
ہم یہ یہ آسانی دیکھتے ہیں کہ اگر ایک پنسل کا ظل کسی دوسرے مستوی پر
نیا جائے تو ظل کی چلیبی نسبت اصلی پنسل کی چلیبی نسبت کے مساوی ہوگی۔
کیونکہ فرض کرو کہ ط (ن، ن، ن، ن) پنسل ہے اور ظل کا

رائس و ہے۔ فرض کرو کہ مستویوں میں اور میں کا خط تقاطع پنسل کی کرنوں کو
(۵۸) 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ط کا ظل ط ہے،
ط ن، کا ظل ط ن، اور علیٰ ہذا القیاس۔

اب (ا ب ج د) ط (ن، ن، ن، ن) کا بھی قاطع ہے
اسلئے ط (ن، ن، ن، ن) = (ا ب ج د) = ط (ن، ن، ن، ن)

۵۴۔ اب ہم وہ شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ چار نقطوں کی دو سعتیں باہم مظلل ہو سکیں۔

مسئلہ۔ اگر اب ج د ایک سعت ہو اور اب ج د ایسی دوسری سعت کہ (اب ج د) = (اب ج د) تو یہ دو سعتیں باہم مظلل ہو سکتی ہیں۔



ا ا کو ملاؤ اور اس پر کوئی نقطہ ط لو۔
ط ب ط ج ط د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ خط نقطہ ا سے
میں سے گزرنیوالے اور مستوی ط د میں واقع ہونے والے ایک خط

علی الترتیب ف، ق، س، را پر ملتے ہیں۔
 ف، ب، ق، ج کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ط پر ملتے ہیں۔
 ط، ا، س، را کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ط، ا، د کو نقطہ لا پر قطع کرتا ہے۔

(54)

اب (ا، ب ج د) = (ا، ف ق س) = (ا، ب ج لا)
 لیکن (ا، ب ج د) = (ا، ب ج د) بموجب فرض
 = (ا، ب ج لا) = (ا، ب ج د)
 لا، د پر منطبق ہوتا ہے (دفعہ ۵۱)۔
 پس را، س ط کے ذریعہ ا، ب ج د کو ا، ف ق س میں
 منظر کیا جاسکتا ہے اور پھر ا، ف ق س کو را، س ط کے ذریعہ
 ا، ب ج د میں منظر کیا جاسکتا ہے۔

اس طرح ہمارا مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۵۵۔ تعریف۔ دو نسبتیں ا، ب ج د ع... اور ا، ب ج د ع...
 ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ ایک کے کسی چار نقطوں کی ایک چلیبی نسبت دوسرے
 کے متناظر چار نقطوں کی متناظر چلیبی نسبت کے مساوی ہو۔ اس کو حسب ذیل
 ترقیم سے ظاہر کرنے میں سہولت ہے۔
 طالب علم کو دفعہ ۵۴ کے ذریعہ یہ ثابت کرنے میں کوئی دقت
 نہیں ہوگی کہ دو ہم رسم نسبتیں باہم منظر ہو سکتی ہیں۔
 دو پنسلیں

ط (ف، ق، س، را، ت...) اور
 ط (ف، ق، س، را، ت...) ہم رسم کہلاتی ہیں جبکہ ایک کی کسی چار کرنوں سے بنی ہوئی پنسل کی چلیبی
 دوسرے کی چار متناظر کرنوں سے بنی ہوئی پنسل کی متناظر چلیبی نسبت

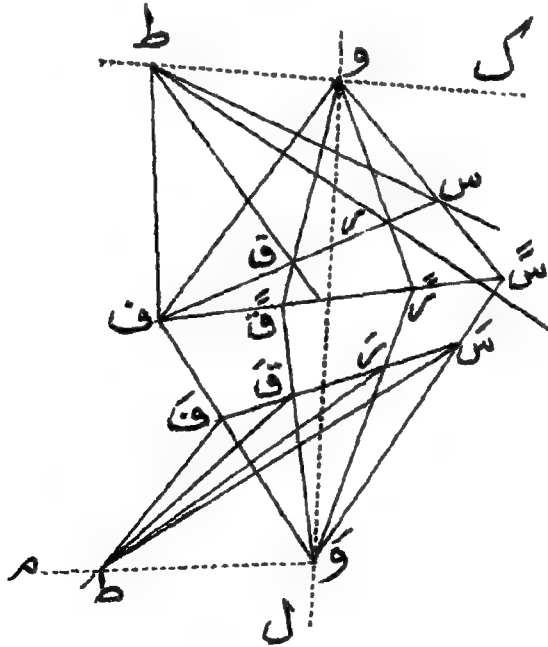
سادہ ہو۔

۵۶۔ مسئلہ۔ دو ہم رسم پنسلیں باہم مُظلل ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ دو ہم رسم پنسلوں کے کوئی دو قاطع فاق راس ہیں۔
فاق راس..... ہیں اور پنسلوں کے راس ط اور ط ہیں۔

فرض کرو کہ فاق راس..... وہ مشترک سمت ہے

جس میں اوپر کی دونوں سمتیں راسوں و اور و کے ذریعہ مُظلل ہو سکتی ہیں
اب و ط پر ایک راس گ لینے سے پنسل ط (فاق راس) پنسل و (فاق راس) میں مُظلل ہو سکتی ہے اور یہ



آخری پنسل و و پر کے ایک راس ل کے ذریعہ پنسل و (فاق راس) پنسل و (فاق راس) میں

یعنی میںل و (ف، ق، ر، س، ...) میں منظر ہو سکتی ہے اور پھر اسے و ط پر کے ایک راس م کے ذریعہ ط (ف، ق، ر، س، ...) میں منظر کیا جا سکتا ہے۔

۵۔ ہم یہ دکھا کر اس باب کو ختم کریں گے کہ ایک دے ہوئے نقطہ میں سے جو دو دے ہوئے متوازی خطوں کے مستوی میں ہے ایک خط ان خطوں کے متوازی کس طرح کھینچا جا سکتا ہے جبکہ عمل صرف پٹری کے ذریعہ کیا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دو دے ہوئے خط ا سہ، ا سہ ہیں جہاں سہ اور سہ ان خطوں پر لاتی تھیں پکا وہ نقطہ ہے جہاں وہ باہم ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان خطوں کے مستوی میں ن دیا ہوا نقطہ ہے۔ کوئی خط ا ج کھینچو جو دے ہوئے خطوں کو ا اور ج پر قطع کرے اور اس پر کوئی نقطہ ب لو۔

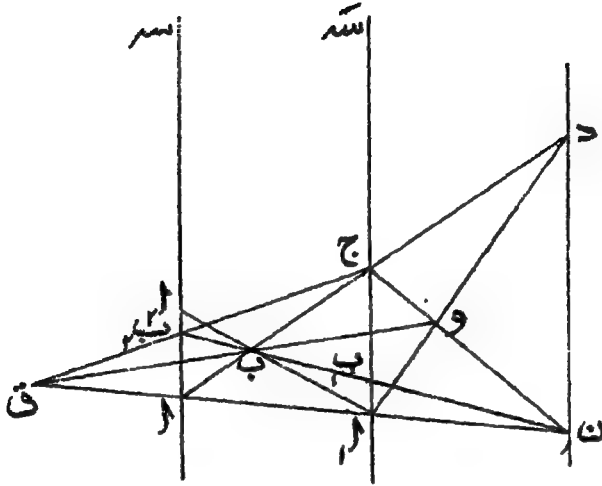
ن ا کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ا سہ کو ا پر قطع کرتا ہے۔ ن ب کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ا سہ کو ب پر اور ا سہ کو ب پر قطع کرتا ہے۔ ن ج کو ملاؤ۔

فرض کرو کہ ا اور ب ج ق پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ ق ب اور ج ن و پر ملتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا و اور ا ج د پر ملتے ہیں۔

ن د مطلوبہ خط ہوگا۔



کیونکہ

$$(ا ب ج سہ) = ب (ا ب ج سہ) = (ا ب ج سہ) = (ا ب ج سہ)$$

$$= (ب ب ن ب) = ج (ب ب ن ب) = (ا ق ن ا)$$

$$= و (ا ق ن ا) = (ا ب ج د)$$

$$ن (ا ب ج سہ) = ن (ا ب ج د)$$

ن د اور ن سہ ایک ہی خط میں ہیں۔

یعنی ن د دے ہوئے خطوں کے متوازی ہے۔

مشقیں

۱۔ اگر (ا ب ج د) = - - - اور ب، د کا وہ نقطہ تشکیل ہو

جو (ا) کی جانب ہے تو ثابت کرو کہ (د) کا دوسرا نقطہ تثلیث ج ہے۔
 ۲۔ تین نقطوں (ا، ب، ج) کی ایک سمت دی گئی ہے، ایک خط پر ایک چوتھا نقطہ د ایسا معلوم کرو کہ (ا، ب، ج، د) ایک دی ہوئی قیمت اختیار کرے۔

۳۔ اگر قاطع (ا، ب، ج، د) کے متوازی ہو جو نیل و (ا، ب) (ج، د) کی ایک کرن ہے تو ثابت کرو کہ

$$(ا، ب، ج، د) = \frac{ا، ب}{ج، د}$$

۴۔ اگر (ا، ب، ج، د) = (ا، ب، ج، د) تو (ا، ب، ج، د) = (ا، ب، د، ج)

۵۔ اگر چار مختلف نقطوں کی ایک سمت (ا، ب، ج، د) ہو اور
 (ا، ب، ج، د) = (ا، د، ج، ب)

تو انہیں سے ہر نسبت = ۱۔
 ۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے حاط مرکز، نقطہ وسطی، نقطہ
 مرکز اور مرکز عمودی سے جو سمت بنتی ہے اسکی چلیبی نسبتوں میں سے آٹھ
 نسبتیں۔ ۱۔ کے مساوی ہیں، آٹھ ۲۔ کے مساوی اور آٹھ ۳۔ کے مساوی۔
 ۷۔ ثابت کرو کہ کوئی مستوی چار دئے ہوئے مستویوں کو جنہیں سے
 سب کے سب ایک مشترک خط پر ملتے ہیں چار خطوں میں قطع کر لیا جو ہم نقطہ
 ہونگے اور اس میں چلیبی نسبت جو ان خطوں سے بنتی ہے منتقل ہوگی۔
 ۸۔ (ا، ب، ج، د) ایک خط میں ہیں اور اس خط میں ایک نقطہ و
 ہے جس سے (ا، ب، ج، د) کے فاصلے (ا، ب، ج، د) ہیں اور

لہ $(ا-د) : (ب-ج) :: (ب-د) : (ج-ا) :: (ج-د) : (ا-ب)$
 ثابت کرو کہ ان سمتوں کی چہرہ مکن چلیبی نسبتیں جو نقطوں (ا، ب، ج، د)
 سے بن سکتی ہیں حسب ذیل ہیں

$$- \frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ج} - \frac{ج}{د} - \frac{د}{ا} - \frac{ا}{د} - \frac{ب}{ج} - \frac{ج}{د} - \frac{د}{ا} - \frac{ا}{ب}$$

پھاباب

(۵۸)

منظرہ

۵۸ - تعریف - ایک شکل جو نقطوں 'ف' 'ق' 'ر' 'س' وغیرہ پر مشتمل ہے

دوسری شکل کے ساتھ جو نقطوں 'ف' 'ق' 'ر' 'س' وغیرہ پر مشتمل ہے منظرہ میں کہلاتی ہے اگر وہ خطوط جو متناظر نقطوں کو ملاتے ہیں یعنی خطوط 'ف' 'ق' 'ر' 'س' وغیرہ ایک نقطہ و میں ملیں - نقطہ و کو منظرہ کا مرکز کہتے ہیں -

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر ایک شکل کو ایک مستوی پر یا ایک سطح پر منتقل کیا جائے تو یہ شکل اپنے ظل کے ساتھ منظرہ میں ہوگی اور ظل کا رأس منظرہ کا مرکز ہوگا -

پہلی نظر میں شاید یہ معلوم ہو کہ منظرہ کا تخیل داخل کر کے ہم نے کسی نئی چیز کا اضافہ نہیں کیا بلکہ یہ وہی مفہوم ہے جو ظل میں بیان ہو چکا ہے - اس لئے ان دو چیزوں کا مقابلہ کرنا بہتر ہو گا تاکہ ان کا فرق معلوم ہو جائے -

ظل میں ایک شکل ایک سطح یا مستوی پر ہوتی ہے اور اسے ہم ظل کے ایک رأس کے ذریعہ دوسری سطح یا مستوی پر منتقل کرتے ہیں لیکن

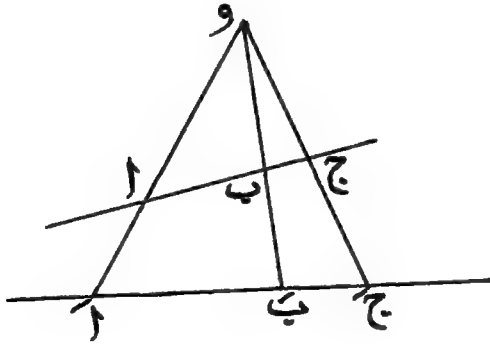
منظرہ میں ان سطحوں یا مستویوں کا ذکر نہیں ہے جن پر یہ دو شکلیں واقع ہوتی ہیں اور صرف اس بات کی ضرورت ہے کہ متناظر نقطوں کو ملانے والے خط ہم نقطہ ہوں۔

پس بلاشبہ وہ دو شکلیں جنہیں سے ہر ایک دوسرے کا ظل ہو منظرہ میں ہونگی لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ دو شکلیں جو منظرہ میں ہوں ایک دوسرے کا ظل بھی ہوں۔

۵۹۔ منظرہ کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اگر نقطوں کی دو سعتیں منظرہ میں ہوں تو ان سعتوں کے خطوط ہم مستوی ہونے چاہئیں۔

(59) کیونکہ اگر ا، ب، ج، وغیرہ ا، ب، ج، وغیرہ کے ساتھ

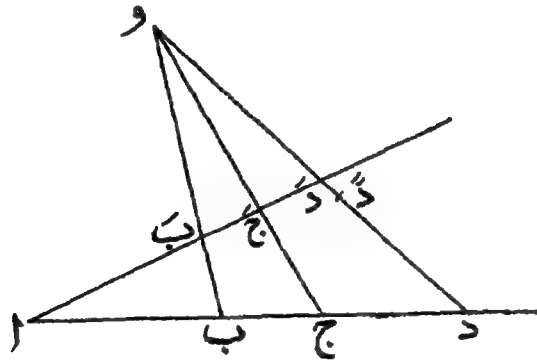
منظرہ میں ہوں اور منظرہ کا مرکز ہو تو ا، ب، ج اور ا، ب، ج ایک ہی مستوی میں ہونگے یعنی اس مستوی میں جو ا، ب، ج اور ا، ب، ج سے گزرتا ہے۔



یہ بھی ظاہر ہے کہ وہ سعتیں جو منظرہ میں ہوں ہم رسم ہوتی ہیں۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ وہ ہم رسم سعتیں جو ایک ہی مستوی میں ہوں منظرہ میں بھی ہوں۔ مسئلہ ذیل سے یہ معلوم ہوگا کہ کس شرط

تحت یہ صورت پیدا ہوگی۔

۶۰۔ مسئلہ۔ اگر ایک ہی مستوی میں دو ہم رسم سعتیں ایسی ہوں کہ ان کے خطوط کا نقطہ تقاطع ان دو سعتوں میں اپنا آپ جواب ہو تو سعتیں منظرہ میں ہونگی۔



فرض کرو کہ $(AB \text{ ج } د \text{ ع } \dots) = (AB \text{ ج } د' \text{ ع } \dots)$

فرض کرو کہ B ب اور ج ج' ویر ملتے ہیں۔
و د کو بلاؤ اور فرض کرو کہ وہ (AB کو د' پر قطع کرتا ہے۔

اب $(AB \text{ ج } د) = (AB \text{ ج } د')$

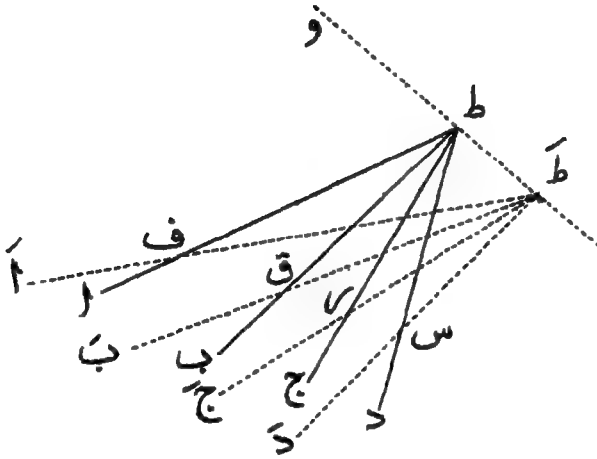
$(AB \text{ ج } د) =$

د اور د' منطبق ہوتے ہیں (دفعہ ۵)۔

پس وہ خط جو دو ہم رسم سعتوں کے کسی متناظر نقطوں کو ملاتا ہے
و میں سے گزرتا ہے اس لئے یہ سعتیں منظرہ میں ہیں۔

۶۱۔ دو پینیس ط (A' B' ج' د') اور ط (A' B' ج')

ہماری تعریف کی بموجب منظرہ میں ہوگی جبکہ ط اور ط منظرہ میں ہوں
 ط ۱ میں کے نقطے ط ۱ میں کے نقطوں کے ساتھ منظرہ میں ہوں
 ط ب میں کے نقطے ط ب میں کے نقطوں کے ساتھ منظرہ میں ہوں
 اور علیٰ ہذا القیاس۔



ہم حسب ذیل مسئلہ فوراً ثابت کر سکتے ہیں۔
 اگر وہ پنسلیں جو مختلف مستویوں میں ہوں منظرہ میں
 ہوں تو وہ ایک مشترک قاطع رکھیں گی اور ہم رسم ہوگی۔
 فرض کرو کہ پنسل ط (ا، ب، ج، د، ...) اور ط (ا،
 ب، ج، د، ...) ہیں۔
 فرض کرو کہ ط ۱ اور ط ۱ جو ہم مستوی (دفعہ ۵۹) ہیں نقطہ

ف پر ملتے ہیں، فرض کرو کہ ط ب اور ط ب نقطہ ق پر ملتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔
 نقطوں ف، ق، س، س میں سے ہر ایک پنسلو
 دو توں مستویوں میں واقع ہے یعنی یہ نقطے ان مستویوں کے خط تقاطع
 میں واقع ہیں۔
 پس یہ نقطے ہم خط ہیں اور چونکہ

$$ط (ا ب ج د \dots) = (ف ق س \dots) = ط (ا ب ج د \dots)$$

اس لئے یہ دو پنسلیں ہم رسم ہیں۔
 خط ف ق س میں متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع
 واقع ہوتے ہیں منظرہ کا محور کہتے ہیں۔

۶۲۔ منظرہ کی تعریف کی بموجب جو اس باب کی ابتدا میں دی گئی ہے
 دو پنسلیں جو ایک ہی مستوی میں ہوں ہمیشہ منظرہ میں ہونگی
 اگر ان کے رؤسوں کو ملانے والے خط پر کوئی نقطہ منظرہ کے مرکز کے طور پر
 لیا جائے۔
 فرض کرو کہ متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع حسب دفعہ ماسبق
 ف، ق، س، س وغیرہ ہیں۔
 یہاں ہم ف، ق، س، س کا ہم خط ہونا ثابت نہیں
 کر سکتے کیونکہ فی الواقعہ انکا ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔
 لیکن اگر ف، ق، س، س وغیرہ ہم خط ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ
 پنسلیں ہم محور ہیں۔

۶۳۔ اگر پنسلیں ہم محور ہوں تو ان کا ہم رسم ہونا ظاہر ہے۔
 اس موضوع پر لکھنے والے مصنفین معمولاً یہ تعریف کرتے ہیں کہ

دو پنسلیں منظرہ میں ہونگی اگر انکی متناظر شعاعیں ہم خط نقطوں میں قطع کریں۔
اس طریقہ پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ مختلف اغراض کے لئے
منظرہ کی ایک مختلف تعریف کرنی ہوگی۔

ہم دیکھیں گے کہ منظرہ کی جو تعریف ہم نے دی ہے اس پر سختی سے
قائم رہنے سے کوئی ابہام پیدا نہیں ہوگا چنانچہ ہم دو پنسلوں کو ہم محورانہ
منظرہ میں کہیں گے اگر انکی متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہوں۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر دو پنسلیں جو ایک ہی مستوی میں نہ ہوں
منظرہ میں ہوں تو ہمیشہ ہم محور ہوتی ہیں لیکن یہ دو ہم مستوی پنسلوں
کے لئے ضروری نہیں ہے۔
دیگر مصنفین جب دو پنسلوں کو منظرہ میں کہتے ہیں تو ان کا مطلب

ایسی پنسلوں سے ہوتا ہے جنکو ہم نے ”ہم محورانہ منظرہ میں“ کہا ہے۔

(62) ۶۴۔ مسئلہ۔ اگر دو ہم رسم پنسلوں میں جو ایک ہی

مستوی میں ہوں ایک شعاع مشترک ہو جو اپنا آپ جواب
ہو تو یہ پنسلیں ہم محورانہ منظرہ میں ہونگی۔

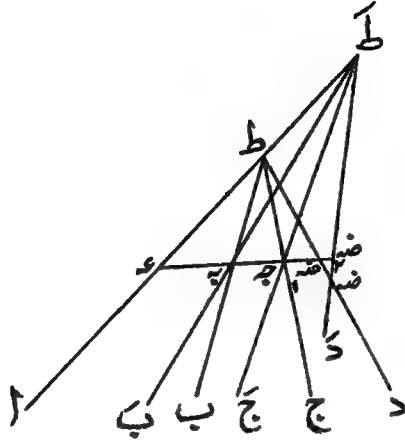
فرض کرو کہ پنسلیں

ط (ا، ب، ج، د، ...) اور ط (ا، ب، ج، د، ...)۔

ہیں اور ان میں مشترک شعاع ط ط ا ہے۔

فرض کرو کہ ط ب اور ط ب، یہ میں متقاطع ہوتے ہیں؛

ط ج اور ط ج، جہ میں؛ ط د اور ط د، ضہ میں اور علیٰ ہذا القیاس۔



فرض کرو کہ جہ 'ط' 'ا' سے عہ پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ وہ شعاعوں ط د اور ط د کو علی الترتیب ضم اور ضم میں قطع کرتا ہے۔
اب چونکہ پینلیس ہم رسم ہیں اس لئے

$$ط (اب ج د) = ط (اب ج د)$$

∴ (عہ بہ جہ ضم) = (عہ بہ جہ ضم)
اس لئے ضم اور ضم، ضم پر منطبق ہوتے ہیں۔
پس متناظر شعاعوں ط د اور ط د کا نقطہ تقاطع خط بہ جہ پر واقع ہوتا ہے۔
اسی طرح کسی دو دوسری متناظر شعاعوں کا نقطہ تقاطع خط بہ جہ پر واقع ہوگا۔

اس لئے نیلیں ہم محورانہ منظرہ میں ہیں۔

۶۵۔ مسئلہ۔ اگر اَب ج.... اور اَب ج.... (63)

دو ہم مستوی اور ہم رسم سعتیں ہوں نہیں کوئی مشترک تناظر

نقطہ نہیں ہے تو متناظر نقطوں کے دو دوزدجوں کو (یعنی

اَب اور اَب) چلیپی طریقہ پر ملانے سے جو نقاط تقاطع

حاصل ہوتے ہیں وہ سب ہم خط ہوں گے۔

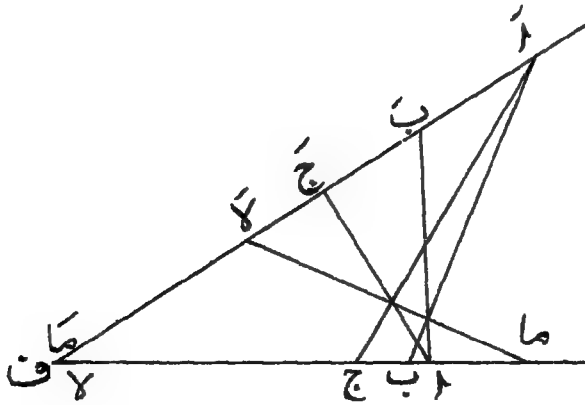
فرض کرو کہ سعتوں کے خطوط ف پر تقاطع ہوتے ہیں۔

اب بموجب فرض ف ان دو سعتوں میں ایک متناظر نقطہ نہیں

بہتر ہو گا کہ ہم ف کو دو حرفوں لا اور ما سے تعبیر کریں،

لا اسوقت جبکہ وہ سعت اَب ج.... سے متعلق ہو اور ما

اسوقت جبکہ وہ سعت اَب ج.... سے متعلق ہو۔



فرض کرو کہ لا، سعت اب ج... کا وہ نقطہ ہے جو دوری
سعت اب ج... کے نقطہ لا کے متناظر ہے اور فرض کرو کہ ما،
سعت اب ج... کا وہ نقطہ ہے جو سعت اب ج... کے نقطہ
ما کے متناظر ہے۔

اب (اب ج لا ما...) = (اب ج لا ما...)

ا (ا اب ج لا ما...) = (ا اب ج لا ما...)

یہ دو پٹیلیں ایک مشترک شعاع ا ا رکھتی ہیں، اس لئے حسب
مسئلہ دفعہ ۱ سابقہ انہی متناظر شعاعوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہیں یعنی
اب، اب، اج، اج، الا، الا، اما، اما

اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس سے یہ معلوم ہو گا کہ ا اور ا کو ب اور ب کے ساتھ،
ج اور ج کے ساتھ، اور علیٰ ہذا القیاس جیسی طور پر ملانے سے جو نقاط
تقاطع حاصل ہوتے ہیں ان کا طریق خط لا ما ہے۔
اسی طرح متناظر نقطوں کے کسی دو زوجوں کو جیسی طور پر ملانے
جو نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں وہ لا ما پر واقع ہونگے۔

(86)

اس خط لا ما کو ان دو سعتوں کا ہم رسم محور کہتے ہیں۔

یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ دو سعتوں میں ایک
مشترک متناظر نقطہ ہو۔ اس کا ثبوت طالب علم پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔
۶۶۔ اس باب میں بتلائے ہوئے طریقوں پر مشق کی خاطر
طالب علم یہ ثابت کرے کہ اگر

ط (ا ب ج...) اور ط (ا ب ج...)۔

دو ہم رسم ہم مستوی پینلیں ہیں جنہیں کوئی مشترک متناظر شعاع نہیں ہے اور اگر ہم ط ف اور ط ق کے اور ط ق اور ط ف کے تقاطع نقاط لیں (ط ف، ط ق اور ط ف، ط ق متناظر خطوں کے کوئی دو زوج ہیں) اور انہیں ملائیں تو وہ تمام خطوط جو اس طرح حاصل ہونگے ہم نقطہ ہونگے۔

جب ہم مکانات (Reciprocation) پر پہنچنے تو یہ معلوم ہوگا کہ یہ مسئلہ دو قہ ۶۵ کے مسئلہ سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

مثلاث منظرہ میں

۶۷۔ مسئلہ۔ اگر دو مثلثوں کے اس منظرہ میں ہوں تو انکے متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع ہم خط ہوں گے اور اس کے برعکس۔

(۱) فرض کرو کہ مثلث مختلف مستویوں میں ہیں۔
فرض کرو کہ مثلثوں ا ب ج اور ا ب ج کے منظرہ کامرکز وہ ہے چونکہ ب ج اور ب ج ایک مستوی میں ہیں یعنی اس مستوی میں ج ہیں اور ج واقع ہیں اسلئے ب ج اور ب ج متقاطع ہونگے۔ فرض کرو کہ لا ان کا نقطہ تقاطع ہے۔

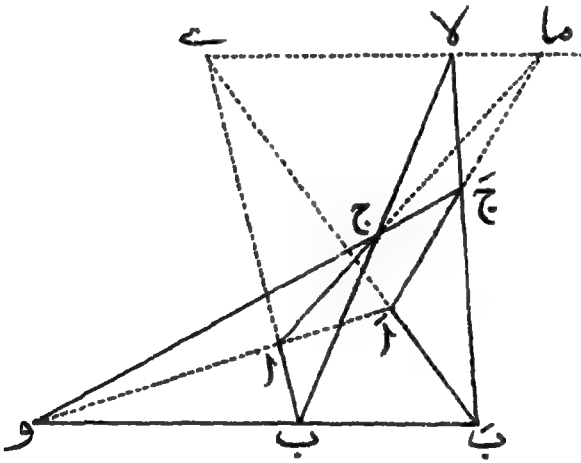
اسی طرح ج ا اور ج ا (نقطہ صابہ) اور ا ب اور ا ب (نقطہ مے پر) متقاطع ہونگے۔

اب نقطے لا، ما، مے، مثلثوں ا ب ج اور ا ب ج دونوں کے مستویوں میں ہیں۔

اس لئے وہ ان مستویوں کے خط تقاطع پر واقع ہیں۔

(65)

اس طرح ہمارے مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت ہو چکا۔
 پھر فرض کرو کہ مثلثات Δ ب ج اور Δ ب ج ج ایسے ہیں کہ
 متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع (لا، ما، ع) ہم خط ہیں۔
 چونکہ ب ج اور ب ج ج ملتے ہیں اس لئے وہ ہم مستوی ہیں
 اور علیٰ ہذا ضلعوں کے دوسرے زوجوں کے لئے۔



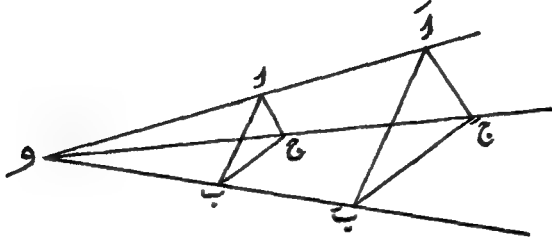
اس طرح تین مستوی ب ج ج ب ج ج ج ج
 Δ ب ب حاصل ہوتے ہیں جنکے خطوط تقاطع Δ ب ب
 ج ج ہیں۔

لیکن یہ تین مستوی ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اس لئے Δ ب ب ج ج ہم نقطہ ہیں یعنی مثلثات

منظرہ میں ہیں۔
 (۲) فرض کرو کہ مثلثات ایک ہی مستوی میں ہیں۔

اول انہیں منظرہ میں فرض کرو جسکا مرکز و ہے۔



فرض کرو کہ حسب سابق متناظر ضلعوں کے نقاط تقاطع لا، ما، ہیں۔

شکل کو اس طور پر منظرہ میں کر دو کہ لا، ما لائن ہی پر منظرہ ہو جائے۔
مختلف نقطوں کے ظلوں کو متناظر چھوٹے حروف سے تعبیر کرو۔ (66)

اب
و ب : و ب = و ج : و ج کیونکہ ب ج ، ب ج کے متوازی ہے
= و ا : و ا کیونکہ ج ا ، ج ا کے متوازی ہے
∴ ا ب ، و ب کے متوازی ہے۔

∴ ی بھی لائن ہی پر ہے۔

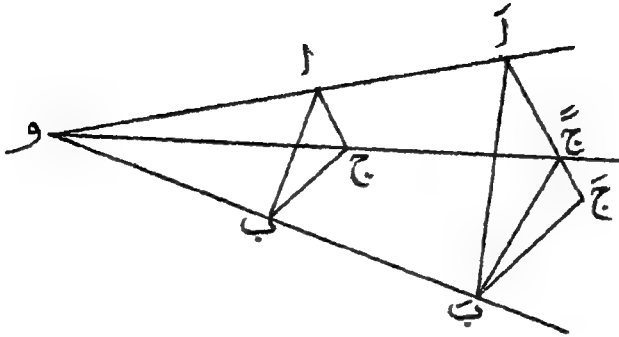
یعنی لا، ما، ی ہم خط ہیں۔

∴ لا، ما، ی ہم خط ہیں۔

پھر فرض کرو کہ لا، ما، ی ہم خط ہیں۔ ہم ثابت کریں گے کہ
مشقات منظرہ میں ہیں۔

فرض کرو کہ ا ا اور ب ب، و پر ملتے ہیں۔

و ج کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ ا ج سے ج پر ملتا ہے۔



تو مثلثات Δ ب ج اور Δ ب ج منظرہ میں ہونگے۔
 نہ ب ج اور ب ج کا نقطہ تقاطع خط ماے پر واقع ہے۔
 لیکن بموجب فرض ب ج اور ب ج خط ماے سے نقطہ لا
 پر ملتے ہیں۔

ب ج اور ب ج ایک ہی خط میں ہیں۔

یعنی ج ج پر منطبق ہوتا ہے۔

اس طرح Δ ب ج اور Δ ب ج منظرہ میں ہیں۔

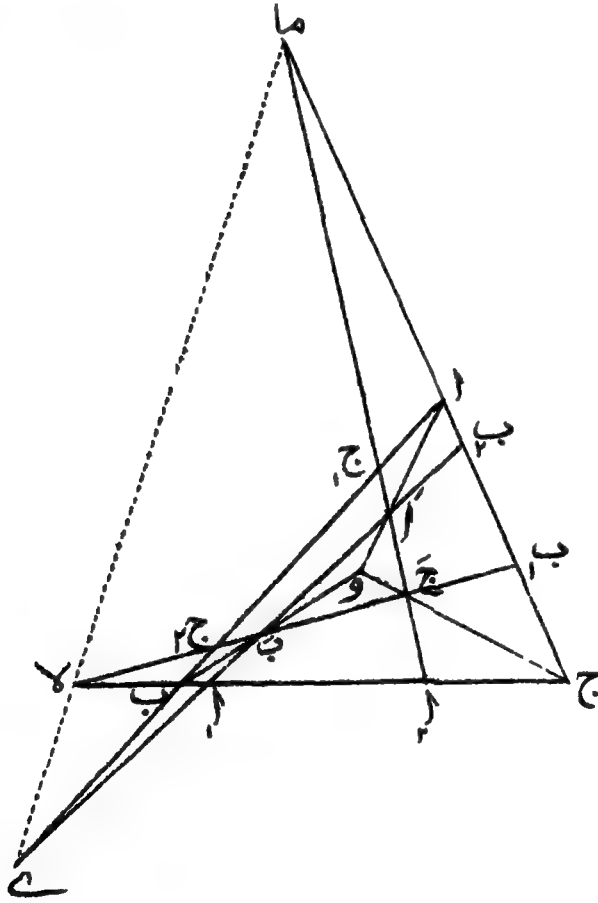
۶۸۔ مسئلہ۔ ضروری اور کافی شرط کہ ہم مستوی مثلث

Δ ب ج، Δ ب ج منظرہ میں ہوں یہ ہے کہ

$$\Delta$$
 ب \times Δ ب ج \times Δ ب ج \times Δ ب ج

$$= \Delta$$
 ب ج \times Δ ب ج \times Δ ب ج \times Δ ب ج

جہاں ا، ا وہ نقطے ہیں جن پر آب اور آج غیر متساوی ضلع ب ج سے ملے ہیں
 ب، ب وہ نقطے ہیں جن پر ب ج اور ب آ غیر متساوی ضلع ج ا سے ملے ہیں
 ج، ج وہ نقطے ہیں جن پر ج ا اور ج ب غیر متساوی ضلع ا ب سے ملے ہیں



اول فرض کرو کہ مثلث منظرہ میں ہیں۔ فرض کرو کہ منظرہ کا محور

لا مائے ہے۔
اب چونکہ لا، ب، ج ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{ا ب \times ج \times لا \times ب \times ج}{ا ج \times ب \times لا \times ج \times ب} = 1$$

اور چونکہ ما، ج، ا، ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{ا م ا \times ج \times ا \times ب \times ج}{ا ج \times ب \times ا \times ج \times م ا} = 1$$

اور چونکہ اے، ا، ب، ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{ا ب \times ج \times ا \times ب \times ا}{ا ا \times ب \times ا \times ج \times ب} = 1$$

ان کا حاصل ضرب لینے سے

$$\frac{ا ب \times ا ب \times ج \times ا \times ج \times ا \times ب \times ج \times ج \times ا م ا \times ج \times لا \times ب \times ا ج \times ا ج \times ب \times ا \times ب \times ا \times ج \times ج \times ب \times ا ا \times ب \times لا \times ج \times م ا}{1} =$$

لیکن لا، ما، اے ہم خط ہیں اس لئے

$$\frac{ا م ا \times ج \times لا \times ب \times ا}{ا ا \times ب \times لا \times ج \times م ا} = 1$$

∴ ا ب × ا ب × ج × ا × ج × ا × ب × ج × ج × ا م ا × ج × لا × ب × ا ج × ا ج × ب × ا × ب × ا × ج × ج × ب × ا ا × ب × لا × ج × م ا

$$= ا ج \times ا ج \times ب \times ا \times ب \times ا \times ج \times ج \times ب \times ا ا \times ب \times لا \times ج \times م ا$$

پھر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ شرط کافی بھی ہے، کیونکہ اس سے یہ لازم آتا ہے کہ

$$= \frac{17 \times 28 \times 2}{17 \times 28} = 2$$

ثابت کرو کہ مثلث (ب ج مرکز میں کے ذریعہ اور مثلث (ب ج مرکز میں کے ذریعہ ایک مشترک مثلث کے ساتھ منظرہ میں ہیں۔
۳۔ یہ مانکر کہ دو غیر ہم مستوی مثلث جو منظرہ میں ہوں ہم محور ہوتے ہیں مثال کے ذریعہ ثابت کرو کہ دو ہم مستوی مثلث بھی جو منظرہ میں ہوں ہم محور ہوتے ہیں۔

۴۔ اگر دو مثلث (ب ج، (ب ج منظرہ میں ہوں اور اگر ب ج اور ب ج، ا میں متقاطع ہوں ب ج اور ج ا، ب میں اور ا ب اور ا ب، ج میں تو مثلث (ب ج، ج دے ہوئے مثلثوں میں سے ہر ایک کے ساتھ منظرہ میں ہوگا اور یہ تینوں مثلث منظرہ کا ایک مشترک محور رکھیں گے۔

۵۔ جب تین مثلثوں میں سے ہر دو منظرہ میں ہوتے ہیں اور ان کا منظرہ کا محور ایک ہی ہوتا ہے تو ان کے منظرہ کے تین مرکز ہم خط ہوتے ہیں۔
۶۔ نقطہ قی اور ص، خط مستقیم (ج پر واقع ہیں اور نقطہ ط، خط مستقیم ا د پر واقع ہے۔ ط ق، خط مستقیم ا ب سے ملتا ہے اور ط ص، ا ب سے ملتا ہے۔ لا، ا ب پر دوسرا نقطہ ہے۔ لاق، ا د سے ملتا ہے اور لا ص، ا د سے ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ما، ع، و، ج ہم نقطہ ہیں۔
۷۔ ضروری اور کافی شرط کہ ہم مستوی مثلث (ب ج، (ب ج منظرہ میں ہوں یہ ہے کہ

$$ا ب \times ب ج \times ج ا = ا ج \times ج ب \times ب ا$$

جہاں ا، ب، ج، مثلث ا ب ج کے اُن ضلعوں کو تعبیر کرتے ہیں جو علی الترتیب ا، ب، ج کے مقابل ہیں اور ا ب اُس عمود کو تعبیر کرتا ہے جو ا سے ب پر کھینچا گیا ہے۔

[فرض کرو کہ ب ج اور ب ج ' لا میں ملتے ہیں؛ ج اور ج ' لا میں؛ ا ب اور ا ب ' سے میں۔ دی ہوئی شرط اس بات کو بتلاتی ہے کہ لا، ما، سے ہم خط ہیں۔]

۸۔ ثابت کرو کہ مثلثوں ا ب ج اور ا ب ج کے منظرہ

میں ہونے کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ

ج ب ا ب ج ج ب ا ب ج ا ب ج ج ب ج ج ا ب ج ج ج

ج ب ا ب ج ج ب ا ب ج ج ج ب ج ج ب ا ب ج ج ب ا ب

۱ =

[اسے لاکھان کی ماڈرن پیور میوٹری میں ثابت کیا گیا ہے۔ اس شرط کو ثابت کرنے کے لئے خود طالب علم کے پاس کافی مواد ہے۔ چنانچہ وہ دفعہ ۳۶ کے توضیح کی طرف رجوع ہو اور و کو باری باری سے ا ب پر، ب ج پر، ج ا پر اور منظرہ کے مرکز پر لے۔ نتیجہ آسانی کے ساتھ حاصل ہوگا۔ یہ یاد رکھنا مشکل بھی نہیں ہے اگر طالب علم اس اصول کو سمجھ چکا ہے جس کے ذریعہ یہ تمام ضابطے جو ایک مثلث کے ضلعوں پر کے نقطوں سے متعلق ہیں بہترین طریقہ پر ذہن میں راہ رکھتے ہیں یعنی مثلث کے گرد دو مخالف سمتوں (۱) ا ب ج، ج ا ب، ب ج ا (۲) ج ب ا، ا ب ج، ج ج ب میں چلنے کا اصول]

۹۔ دو مثلث جو ایک ہی مستوی میں منظرہ میں ہوں متساوی الاضلاع مثلثوں میں متطبیق کئے جاسکتے ہیں۔

۱۰۔ ا ب ج ایک مثلث ہے اور ا ب ج کے مقابل اسکے جانبی مرکز علی الترتیب ع، ع، ع ہیں۔ ع، ع، ع ب ج سے ا ب پر ملتا ہے؛ ع، ع، ع ج ا سے ب پر ملتا ہے؛ اور ع، ع، ع ا ب سے ج پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا ب ج، ب ج ا، ج ا ب ہم خط ہیں۔

۱۱۔ اگر ا د ب ع ج ف اور ا د ب ع ج ف
 ہم نقطہ خطوں کے دو جٹ ہوں جو ایک مثلث ا ب ج کے راسوں
 میں سے کھینچے گئے ہیں اور جو متقابلہ اضلاع سے د ع ا ف اور د
 ع ا ف پر ملتے ہیں، اور اگر ع ف اور ع ف ا لا میں متقاطع
 ہوں، ف د اور ف د ا ما میں اور د ع اور د ع اے
 میں تو مثلث لا ماے، مثلثوں ا ب ج د ع ف ا د ع ف
 میں سے ہر ایک کے ساتھ منظرہ میں ہوگا۔
 [مثلث کو اس طور پر غلط کر د کہ غلط میں ا د ب ع ج ف
 عمود اور ا د ب ع ج ف خطوط وسطی ہو جائیں۔ پھر
 مثال ۷ استعمال کرو۔]

[71]

ساتواں باب

موسیقی تراش

۶۹۔ تعریف۔ چارم خط تقطے 'ا' ب 'ج' د موسیقی ^{سخت} بنائینگے اگر

$$(ا ب ج د) = ۱$$

$$\frac{د}{ج} = \frac{ب}{ا}$$

اس صورت میں

$$۱ = \frac{ا ب \times ج د}{ا د \times ج ب}$$

$$\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ب - ا ج}{ا د - ا ج} = \frac{ا ج - ا ب}{ا ج - ا د}$$

یعنی 'ا ج' 'ا ب' اور 'ا د' کے درمیان اوسط موسیقی ہے۔
(دفعہ ۵۰)

اب چار نقطوں کی کسی سمت کی چوبیس چلیبی نسبتوں کی جدول کی طرف رجوع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر (ا ب ج د) = ۱-۱ تو حسب ذیل تمام چلیبی نسبتیں = ۱-۱

(ا ب ج د) (ب ا د ج) (ج د ا ب) (د ج ب ا)

(ا د ج ب) (ب ج د ا) (ج ب ا د) (د ا ب ج)

پس نہ صرف ا ج، ا ب اور ا د کے درمیان موسیقی اوسط

ہے بلکہ

ب د بھی ا اور ب ج کے درمیان اوسط موسیقی

د ب - د ج اور د ا

ج ا - ج ب اور ج د

اس لئے ہم ا اور ج کو ب اور د کے موسیقی مزدوج

کہیں گے اور اس واقعہ کو علامتوں میں اس طرح ظاہر کریں گے

(ا ج، ب د) = ۱-۱

اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ آٹھ چلیبی نسبتیں جو اوپر دی گئی ہیں اور

جن میں ا اور ج متبادل ارکان ہیں اور ب اور د متبادل ارکان

ہیں۔ ا کے مساوی ہیں۔

جب (ا ج، ب د) = ۱-۱ تو ہم بعض اوقات د کو ا ب

اور ج کا چوتھا موسیقی کہتے ہیں نیز ہم کہتے ہیں کہ ا ج، ب

اور د پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوا ہے اور ب د، ا اور ج

پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوا ہے۔ یا ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ ب

اور د کے لحاظ سے ج، ا کا موسیقی طور پر مزدوج ہے۔

چار شعاعوں کی ایک میل پ (ا، ب، ج، د) موسیقی

کہلاتی ہے جبکہ ایک قاطع کے ساتھ اس کی شعاعوں کے نقاط تقاطع

ایک سویستی سمت بنائیں۔
طالب علم خود یہ آسانی سے ثابت کر سکتا ہے کہ کسی زاوے کے
اندرونی اور بیرونی ماصف اور زاوے کی ساقیں باہم سویستی پینسل بنائی
۷۰۔ مسئلہ۔ اگر (ا ج ب د) = ۱ اور ا ج کا نقطہ وسطی
وہو تو

$$\text{وب} \times \text{ود} = \text{وج} = \text{وا}$$

$$\text{د} \quad \text{ا} \quad \text{ب} \quad \text{ج} \quad \text{و}$$

چونکہ (ا ب ج د) = ۱
اب \times ج د = ۱ = ا د \times ج ب
مبدأ و داخل کرو تو
(وب - و) (ود - و) = (ود - و) (وب - و)
لیکن و = ۱ = وج
۱۔ (وب + وج) (ود - وج) = (ود - وج) (وب - وج)
۲۔ وب \times ود + وج \times ود = وب \times وج - وج \times وج
= ود \times وب + وب \times وج - ود \times وج - وب \times وج + وج
۳۔ وب \times ود = ۲ وج
۴۔ وب \times ود = وج = وا = و
اسی طرح اگر و ب د کا نقطہ وسطی ہو تو
وج \times و ا = و ب = و د

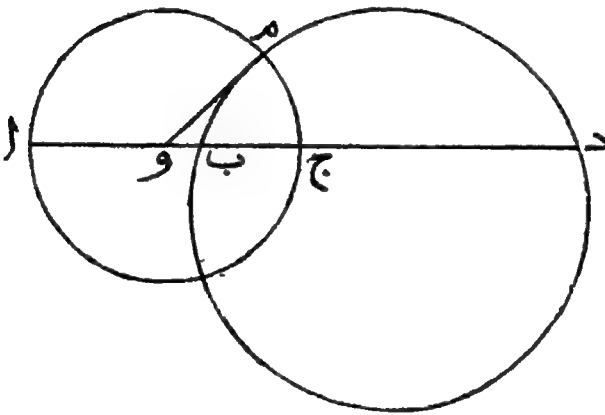
نتیجہ صریح ۱۔ اس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر ا ب ج د
ایک سمت ہو اور ا ج کا نقطہ وسطی ہو اور وج = وب \times ود تو

یہ نتیجہ اوپر کے جبری عمل کو اٹا کرنے سے حاصل ہو جائیگا۔
 نتیجہ صریح ۲۔ اگر تین نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک خط میں دئے

(73)

گئے ہوں اور اس خط میں ایک چوتھا نقطہ 'د' ایسا معلوم کرنا ہو کہ
 ('ا'، 'ب'، 'ج'، 'د') = ۱۔ تو 'ا'، 'ب' پر ایسے قطر مانکر ایک دائرہ کھینچو
 تو 'د'، 'ج' کا متغلوب نقطہ ہوگا۔

۱۔ مسئلہ۔ اگر ('ا'، 'ب'، 'ج'، 'د') = ۱۔ تو 'ا'، 'ج' پر ایسکو
 قطر مانکر کھینچا ہوا دائرہ 'ب' اور 'د' میں سے گزرنیوالے
 ہر دائرہ کو علی القوالم قطع کریگا۔



فرض کرو کہ 'ا'، 'ج' کا وسطی نقطہ 'و' ہے اور اس لئے 'و'، 'ا'، 'ج' پر کے دائرہ کام کرتا ہے۔
 فرض کرو کہ یہ دائرہ 'ب' اور 'د' میں سے گزرنیوالے کسی دائرہ کو

مہ قطع کرتا ہے تو گزشتہ مسئلہ کے رو سے

$$\text{وب} \times \text{ود} = \text{وج} = \text{وم}^2$$

اس لئے 'وم' دائرہ ب م د کا ایک ٹاس ہے، اس لئے دائرے علی القوائم قطع ہوتے ہیں۔

اسی طرح اب د پر کا دائرہ 'ا' اور ج میں سے گزرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کریگا۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر اب ج د ایک سمت ہو اور اگر ا ج کو قطر مانکر اس پر ایک دائرہ کھینچا جائے جو ب اور د میں سے گزرنیوالے کسی ایک دائرہ کو علی القوائم قطع کرے تو

$$(\text{ا ج} \text{ ب د}) = 1 -$$

کیونکہ اوپر کی شکل استعمال کرنے سے

$$\text{وب} \times \text{ود} = \text{وج} = \text{وم}^2$$

$$(\text{ا ج} \text{ ب د}) = 1 -$$

نتیجہ صریح ۲۔ اگر دو دائرے علی القوائم متقاطع ہوں تو ایک دائرہ کے کسی قطر کی دوسرے دائرہ سے موسیقی طور پر تقسیم ہوتی ہے۔

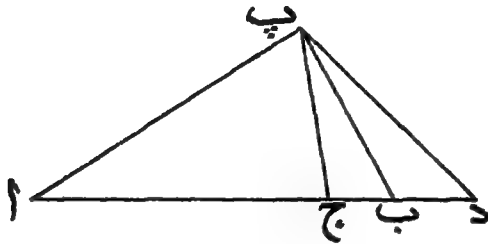
۳۔ مسئلہ۔ اگر پ (ا ب ج د) = ۱- اور زاویہ

ا پ ب قائمہ ہو تو پ ا اور پ ب، ان زاویوں کے

ناصف ہونگے جو پ ج اور پ د کے درمیان ہیں۔

زمن کرد کہ موسیقی پنسل کی شعاعوں پ ا پ ب پ ج پ د

کو کوئی قاطع خط تقطوں ا ب ج د پر قطع کرتا ہے۔



اب چونکہ (ا ب ج د) = ۱۔

$$۱ = \frac{ا ج \times ب د}{ا د \times ج ب}$$

۱۔ چونکہ پ ا ا د = ج ب : ب د
اس لئے دفعہ ۱ کی رو سے

پ ج : پ د = ج ب : ب د = ا ج : ا د
پ ا اور پ ب زاویہ ج پ د کے منصف ہیں۔

۳۔ مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ کے ایک وتر ف ق پر
دائرہ کے لحاظ سے دو مزدوج نقطے ا اور آ لئے جائیں تو

(ف ق ا آ) = ۱۔
ا میں سے قطر ج د کی پیروی آ کے قطبی کو جس پر آ واقع ہے
ل قطع کرے۔

فرض کرو کہ مرکز و ہے۔
اب قطبی کی خاصیت سے

ول \times وا = وج

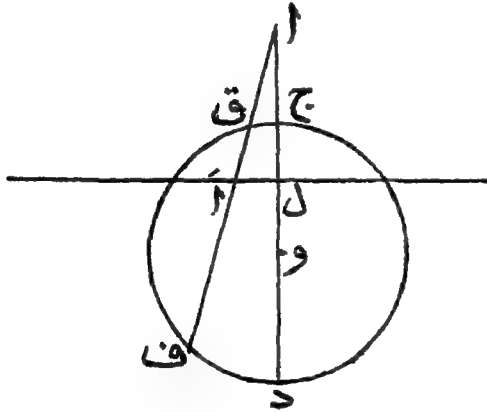
ش (ج د ل ا) = ۱

اس لئے ج د پر کا دائرہ (یعنی دیا ہوا دائرہ) ا اور ل میں سے گزرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے (دفعہ ۱۷)۔

لیکن وہ دائرہ جس کا ایک قطر ا ہے ا اور ل میں سے گزرتا ہے۔

اس لئے دیا ہوا دائرہ اس دائرہ کو جس کا ایک قطر ا ہے علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(75) لیکن دیا ہوا دائرہ ف اور ق میں سے گزرتا ہے، اس لئے
(ف ق ا) = ۱



دائرہ کی یہ موسیقی خاصیت بہت اہم اور فائدہ مند ہے۔ اسے دوسرے طریقہ سے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے:

ایک نقطہ ا میں سے گزرنیوالے ایک دائرہ کے کسی وتر کی ا پر اور اس نقطہ پر جو وتر اور ا کے قطبی کا نقطہ تقاطع ہے

موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتی ہے۔

۴۔ مسئلہ۔ کسی مستوی ذواربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے ہر ایک کی دوسرے دو وتروں سے موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ 'ا ب' 'ب ج' 'ج د' 'د ا' ذواربعۃ الاضلاع کے چار خطوط ہیں اور نقاط 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ع' 'ف' اس کے چھرا ہیں یعنی وہ نقاط تقاطع ہیں جو اس کے خطوں میں سے دو دو کو لینے پر حاصل ہوتے ہیں۔

پس 'ا ج' 'ب د' 'ع ف' اس کے وتر ہیں۔ فرض کرو کہ ان وتروں سے مثلث 'ف ق' کا بنتا ہے۔ 'ع' کو لاتنا ہی پر مسلسل کرو اور قبل کے نقطوں کو متناظر چھوٹے حروف سے تعبیر کرو۔

اب

$$(ب ف د ق) = (ب ف د ق) = \frac{ب ف \times د ق}{ب ق \times د ف} = \frac{ب ف}{د ف}$$

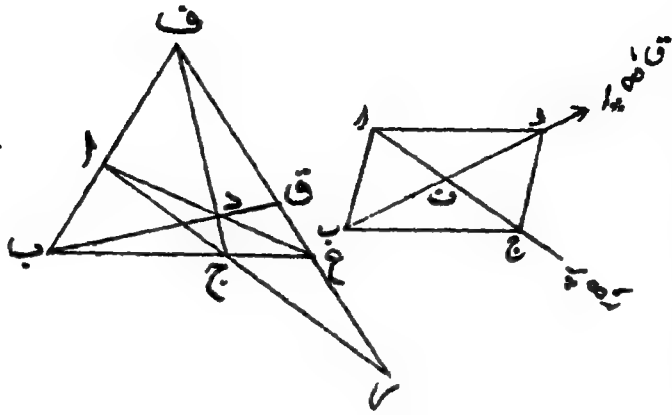
$$(کیونکہ \frac{د ق}{ب ق} = ۱، ق چونکہ \infty پر ہے)$$

$$۱ =$$

$$اسی طرح (ا ف ج ص) = ۱ =$$

$$نیز (ف ق ع ص) = (ب ف ق ع ص) =$$

$$= (ا ف ج ص) = ۱ =$$



اس طرح ثابت ہو چکا کہ

(ا ج ف ص) = (ا ب د ف ق) = (ا ع ف ق ص) = ا

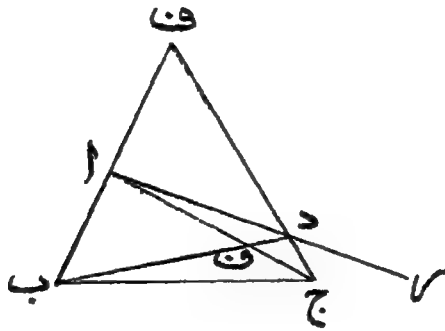
نتیجہ صریح - ف ق ص کا مائٹ دائرہ ان تین دائروں کو علی التوالم

قطع کرے گا جو تین دتروں پر انہیں قطر مانکر کھینچے گئے ہوں -
نوٹ - ضمنی اوپر کے ثبوت میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر ا ب
کا نقطہ وسطی ہو اور اس خط پر لاتنا ہی پر کا نقطہ وسطی ہو تو

(ا ب ص) = ا - ا -

۵ - ذواربعۃ الاضلاع کی وہ موسیقی خاصیت جو گدشتہ دفعہ میں
ثابت کی جا چکی ہے بڑی اہم ہے - زیر بحث موضوع کی اس منزل پر یہ بھی
ضروری ہے کہ طالب علم ذواربعۃ الاضلاع کو ”بیانیہ“ نہ کہ ”نگاہ سے
دیکھنا“ سکھے کیونکہ ”بیانیہ علم ہندسہ“ میں ذواربعۃ الاضلاع کو ایک
بند شکل نہیں خیال کیا جاتا جس میں ایک رقبہ گھرا ہوا ہو بلکہ اسے ایک
مستوی میں چار خطوں کا اجتماع سمجھا جاتا ہے جو دو دو کر کے چہ نقطوں پر
ملے ہیں جنکو رأس کہتے ہیں، اور درودہ تین خط میں جو ان رأسوں کو

ملانے سے حاصل ہوتے ہیں جو پہلے ہی ذواربعۃ الاضلاع کے خطوں سے
 نہ ملے ہوئے ہوں۔ متقابلہ رأسوں سے ہمارا مطلب وہ دور اس
 ہیں جو ذواربعۃ الاضلاع کے ایک خط سے نہ ملے ہوئے ہوں۔
 ۷۔ ذواربعۃ الاضلاع اور چار زاوی میں فرق ہے۔ چار زاوی کو ایک
 مستوی میں چار نقطوں کا ایک اجتماع خیال کرنا پڑے گا جو دو دو کر کے
 چہرہ خطوں سے ملایا جاسکتا ہے جو اس کے ضلع یا خط کہلاتے ہیں انہیں
 دو ضلع جو چار زاوی کے ایک نقطہ پر نہیں ملتے متقابلہ ضلع کہلاتے ہیں۔
 دو متقابلہ ضلعوں کا نقطہ تقاطع و تری نقطہ کہلاتا ہے۔ یہ نام کچھ زیادہ
 سوزوں نہیں لیکن اسکو ذواربعۃ الاضلاع کی مشابہت کے لحاظ سے
 تجویز کیا گیا ہے۔ ہم حسب ذیل شکل میں چار زاوی کے اہم اجزاء دکھاتے ہیں۔



ا ب ج د چار زاوی ہے۔ اس کے ضلع ا ب، ب ج،
 ج د، د ا، ا ج اور ب د ہیں۔
 ا ب اور ج د، ا ج اور ب د، ا د اور ب ج

متقابلہ اضلاع ہیں اور نقطے 'ف' 'ق' 'س' جہاں یہ متقاطع ہوتے ہیں وتری نقطے ہیں۔

مثلت 'ف' 'ق' 'س' کو وتری مثلث کہا جاسکتا ہے۔

چار زاوی کی موسیقی خاصیت یہ ہے کہ ہر وتری نقطہ پر وتری مثلث کے چودو ضلع ہیں وہ 'چار زاوی' کے ان دو ضلعوں کے لحاظ سے جو اس نقطہ پر ملتے ہیں موسیقی فردوج ہیں۔

طالب علم کو یہ معلوم کر لینے میں کوئی مشکل پیش نہیں آئے گی کہ 'چار زاوی' کی یہ موسیقی خاصیت ذواربعۃ الاضلاع کی موسیقی خاصیت سے جو دفعہ ۴۷ میں ثابت کی جا چکی ہے اخذ کیا جاسکتی ہے۔ اس موسیقی خاصیت کی بناء پر اس وتری مثلث کو جو 'چار زاوی' سے متعلق ہو موسیقی مثلث بھی کہا گیا ہے۔

مشقیں

(78)

۱۔ اگر دو ہم ستوی خطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں 'د' اور 'ن' دو نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ایسا غل لینا ممکن ہے کہ 'د' اور 'ن' 'ا' 'ب' اور 'ج' 'د' کے خطوں کے وسطی نقطوں میں متقابل ہوں۔

۲۔ ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرتی والے تین ہم نقطہ خطوط 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہیں جو متقابلہ اضلاع سے نقطوں 'ا' 'ب' 'ج' پر ملتے ہیں۔ 'ب' 'ج' 'د' سے 'ا' پر ملتا ہے اور 'ج' 'ا' 'د' سے 'ب' پر ملتا ہے اور 'ا' 'ب' 'ج' سے 'د' پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ (ب'ج' 'ا' 'د') = (ا' 'ج' 'ب' 'د') = (ا' 'ب' 'ج' 'د') = (ا' 'ب' 'ج' 'د') = ۱۔

۳۔ ثابت کرو کہ دو دائرے جو خطوط $ا، ا، ب، ب، ج، ج$ پر
(جنکی تعریف مثال ۲ میں ہو چکی ہے) انہیں قطر مانکر کھینچے گئے ہوں ہم محور ہیں
اور ثابت کرو کہ $ج، ج، ح، ح$ کے محاذی $ف$ پر قائمہ زاویہ بنتا ہے۔ مثال ۲
اور دفعہ ۲ استعمال کرو

۴۔ تین ہم خط نقطے $ا، د، ج$ دے گئے ہیں $ج$ میں سے گزرنے والا
کوئی دوسرا خط $ج$ ہے $ع$ ایک ثابت نقطہ ہے اور $ب، ج، ح$ پر
کوئی متحرک نقطہ ہے۔ خطوط $ا، ع$ اور $ب، د، ق$ پر متقاطع ہوتے ہیں
خطوط $ج، ق$ اور $د، ع$ پر اور خطوط $ب، ک$ اور $ا، ج، ف$ پر
متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب $ب، ج، ع$ پر حرکت کرتا ہے تو
 $ف$ ایک ثابت نقطہ ہے۔

۵۔ ایک مثلث $ا، ب، ج$ کے ضلع $ب، ج$ میں کوئی نقطہ $م$ ہے، اس نقطہ
سے خطوط $م، ب$ اور $م، ج$ علی الترتیب $ا، ج$ اور $ا، ب$ کے متوازی
کھینچے گئے ہیں جو $ا، ب$ اور $ا، ج$ کو $ب، ج$ پر قطع کرتے ہیں۔ خطوط
 $ب، ج$ اور $ج، ب، ف$ پر متقاطع ہوتے ہیں اور $ا، ف، ب، ج$
کو $م$ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$م، ب : م، ج = ب، ج : ج، ب$

۶۔ ایک مثلث $ا، ب، ج$ کے ضلعوں $ب، ج$ اور $ا، ج$
 $ا، ب$ پر علی الترتیب موسیقی مزدوجوں کے زوج $(د، د)$ ، $(ع، ع)$ ، $(ف، ف)$
نقطوں کے زوجوں $(ب، ج)$ ، $(ج، ا)$ ، $(ا، ب)$ کے لحاظ سے
لئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلثوں $د، ع، ف$ اور $د، ع، ف$ کے متناظر
اضلاع مثلث $ا، ب، ج$ کے ضلعوں پر متقاطع ہوتے ہیں یعنی $ع، ف$
اور $ع، ف$ ضلع $ب، ج$ پر متقاطع ہوتے ہیں اور علی ہذا القیاس۔
۷۔ مثلث $ا، ب، ج$ کے راسوں کو کسی نقطہ $ط$ سے ملایا گیا ہے
ملانیوالے خطوں سے جو زاوے بنے ہیں انکی داخلی تفسیف خطوط

ط ا ط ب ط ج سے ہوئی ہے۔ ا ب ج پر واقع ہے ب
ضلع ج ا پر اور ج ضلع ا ب پر واقع ہے۔ نیز ا ب ج کے
موسیقی فردوج لحاظ ب اور ج ج اور ا ا اور ب کے ا ب ج
ج ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ب ج ہم خط ہیں۔

۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے عمود ا ا ب ب ج ج ہیں۔

ا ب ضلع ا ب سے ج پر ملتا ہے۔ لا اس خط کا نقطہ وسطی ہے جو
ا کو مرکز عمودی سے ملتا ہے ج لا اور ب ب ب ت پر ملتے ہیں۔
ثابت کرو کہ ج ت ب ج پر عمود ہے۔

۹۔ ایک دائرہ کے باہر ا ایک ثابت نقطہ ہے اور
دائرہ کے محیط پر ف ایک متغیر نقطہ ہے۔ خط ا ق جو ا ف کے
علی القوا تم ہے ف پر کے مماس سے ق پر ملتا ہے۔ اگر مستطیل
ق ا ف مرا کی پیمائش کیا جائے تو ثابت کرو کہ مرا کا طریق ایک خط مستقیم
ہے۔

۱۰۔ دو غیر قاطع دائروں کو کاٹتا ہوا ایک خط کھینچا گیا ہے۔ اس خط پر
دو ایسے نقطے معلوم کر نیا عمل دریاقت کرو کہ ہر نقطہ (ان دو دائروں کے لحاظ سے)
دوسرے نقطہ کے قطبیوں کا نقطہ تقاطع ہو۔

۱۱۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر راسوں ا ب ج ج
کے مقابل تین نقطے ا ب ج ہیں۔ نیز ضلعوں پر ا ب ج ج
ایسے نقطے ہیں کہ ا اور ا نقاط ب اور ج کے موسیقی فردوج ہیں ب
اور ب نقاط ج اور ا کے موسیقی فردوج ہیں اور ج اور ج نقاط
ا اور ب کے موسیقی فردوج ہیں۔ اگر ا ب ج ہم خط ہوں تو ثابت کرو کہ
ا ا ب ب ج ج ہم نقطہ ہونے چاہئیں۔

- ۱۲۔ ایک مثلث ABC کے راسوں میں سے A ، B ، C پر نقطہ خطوط ہیں۔ B ، C اور A پر ملتے ہیں۔ C ، A اور B پر ملتے ہیں۔ A ، B اور C پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرے جو A ، B ، C پر انہیں قطر مان کر کھینچے گئے ہوں سب کے سب ABC کے حاطہ دائرہ کو علی القواہم قطع کرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ہی خط مستقیم میں واقع ہیں۔ (مثال ۳ کے ساتھ مقابلہ کرو)
- ۱۳۔ اگر A اور B ایک دائرہ کے مزدوج نقطے ہوں اور AB کا وسطی نقطہ M ہو تو ثابت کرو کہ ہر سے دائرہ کے مماس طول MA کے جوئے
- ۱۴۔ اگر دائروں کے ایک نظام کے ہر دائرہ کے لئے نقطوں کا ایک ہی زوج مزدوج ہو تو دائروں میں سے دو دو کے بنیادی محور ہم نقطہ ہونگے۔
- ۱۵۔ اگر دائروں کا ایک نظام مقلوب نقطوں کا ایک مشترک زوج رکھے تو یہ نظام ہم محور ہونا چاہئے۔
- ۱۶۔ ہم محور دائروں کے ایک نظام کے انتہائی نقطے W اور W' ہیں اور ان کے مستوی میں A کوئی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ A سے ان میں سے کسی ایک دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو وتر مماس اس قطر کے دوسرے سرے میں سے گزرے گا جو A میں سے دائرہ A و W کا کھینچا گیا ہے۔

آٹھواں باب

دریچ

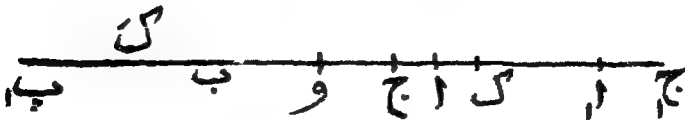
(80)

تعریف -

اگر ایک خط پر و ایک نقطہ ہو اور اسی خط پر نقطوں کے زوج
'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' وغیرہ ایسے ہوں کہ

$$وا \times و ا = وب \times و ب = وج \times و ج = ... = ک$$

تو ہم کہتے ہیں کہ نقطوں کے یہ زوج دریچ میں ہیں۔ دو متعلقہ نقطے
جیسے 'ا' اور 'ب' مزدوج کہلاتے ہیں اور بعض اوقات ہر مزدوج دوسرے
کا "زوج" کہلاتا ہے۔
نقطہ و کو دریچ کا مرکز کہتے ہیں۔



اگر ک جو دریچ کا مستقل ہے مثبت ہو تو دو مزدوج نقطے
و کی ایک ہی جانب واقع ہونگے اور خط پر و کی مخالف جانبوں میں

ک کے دو حقیقی نقطے ایسے ہونگے کہ ہر ایک نقطہ درپچ میں اپنا آپ زوج ہو گا یعنی وک^۱ = وک^۲ = ک^۱۔ یہ نقطے ک اور ک کے درپچ کے دو ہرے نقطے کہلاتے ہیں۔

یہ یاد رہے کہ ک، ک کا زوج نہیں ہے، یہی وجہ ہے کہ ہم نے ک کے لکھا ہے اور ک، نہیں لکھا۔

یہ ظاہر ہے کہ (ا، ا، ک، ک) = ا اور یہ نقطوں کے تمام

زوجوں کے لئے درست ہے۔ اگر ک منفی ہو تو دو فرد زوج نقطے و کی مخالف جانبوں میں واقع ہونگے اور اس صورت میں دو ہرے نقطے خیالی ہونگے۔

اگر ا، ب، ج، ج، وغیرہ پر انہیں قطر مائکر دائرے کیلئے جائیں تو یہ دائرے ایک ہم محور نظام بنائینگے جس کا محور ایش خط کو جس پر نقطے واقع ہیں و پر قطع کریگا۔

ک اور ک اس ہم محور نظام کے انتہائی نقطے ہونگے۔ یہ یاد رہے کہ نقطوں کے ہر زوج میں ہر نقطہ بلحاظ ایش دائرہ کے جو ک کے قطر مائکر کیلئے جائیگا ہو دوسرے نقطہ کا مقلوب ہو گا۔

یہ ظاہر ہے کہ اگر نقطوں کے دو زوج معلوم ہوں یا نقطوں کا ایک زوج اور ایک دوسرا نقطہ یا دو دوسرے نقطے معلوم ہوں تو درپچ پوری طرح متعین ہو جاتا ہے۔

اب ہمیں وہ شرط معلوم کرنی چاہئے کہ ایک ہی خط پر نقطوں کے تین زوج ایک ہی درپچ سے متعلق ہو سکیں۔

۸۔ مسئلہ۔ ضروری اور کافی شرط کہ نقطوں کا ایک زوج

ج، ج، اُس دریچ سے متعلق ہو جو نقطوں کے دوز و جوں
ا، ا، ب، ب سے متعین ہوتا ہے یہ ہے کہ

$$(ا ب ج ا) = (ا ب ج ا)$$

اول ہم یہ ثابت کریں گے کہ یہ شرط ضروری ہے۔
فرض کرو کہ ج اور ج، دریچ سے متعلق ہیں۔ فرض کرو کہ اس
دریچ کا مرکز و ہے اور اس کا مستقل ک۔

$$ا \times و ا = و ب \times و ب = و ج \times و ج = ک$$

$$\therefore (ا ب ج ا) = \frac{ا ب \times ج ا}{(ا ب - و ا)(و ا - و ج)} = \frac{ا ا \times ج ب}{(ا ب - و ا)(و ا - و ج)}$$

$$= \frac{\left(\frac{ک}{و ب} - \frac{ک}{و ا}\right) \left(\frac{ک}{و ا} - \frac{ک}{و ج}\right)}{\left(\frac{ک}{و ب} - \frac{ک}{و ا}\right) \left(\frac{ک}{و ا} - \frac{ک}{و ج}\right)}$$

$$= \frac{(و ب - و ا)(و ا - و ج) ا ب \times ج ا}{(ا ب ج ا) (و ا - و ا)(و ب - و ج) ا ا \times ج ب} =$$

اس طرح مندرجہ بالا شرط ضروری ہے۔
[اس مسئلہ کا اس سے زیادہ فالص ہندی ثبوت آئندہ دفعہ میں
دیا جائیگا]
ثانیاً اوپر کی شرط کافی ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ

$$(ا ب ج ا) = (ا ب ج ا)$$

اور فرض کرو کہ اس دریچ میں جو 'ا' 'ب' 'ب' سے متعین ہوتا ہے ج کا زوج ج ہے۔

$$(ا ب ج ا) = (ا ب ج ا)$$

(82)

$$(ا ب ج ا) = (ا ب ج ا)$$

ج اور ج منطق ہوتے ہیں۔

پس مسئلہ پوری طرح ثابت ہو چکا۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر 'ا' 'ب' 'ب' 'ج' 'ج' 'د' 'د' ایک ہی دریچ سے متعلق ہوں تو

$$(ا ب ج د) = (ا ب ج د)$$

نتیجہ صریح ۲۔ اگر دریچ کے دہرے نقطے 'ک' 'ک' ہوں تو

$$(ا ب ک ک) = (ا ب ک ک)$$

$$(ا ب ک ا) = (ا ب ک ا)$$

اور

۹۔ دفعہ مابقی کے مسئلہ کا پہلا حصہ حسب ذیل طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا ہے

اگر نقطوں کے تین زوج ایک ہی دریچ سے متعلق ہوں تو 'ا' 'ب' 'ب' 'ج' 'ج' پر انہیں نظر مائل کر کھینچے ہوئے دائرے ہم محور ہوں گے (دفعہ ۷)۔

فرض کرو کہ ان دائروں کا ایک نقطہ تقاطع ف ہے۔

جوان چار نقطوں کے زوجوں سے بنتی ہے۔

حرفوں کی ترتیب کوئی اہمیت نہیں رکھتی لیکن انکا چلیپی نسبتوں میں ایک دوسرے کا جواب ہونا ضروری ہے۔ چنانچہ یہ ہو سکتا ہے کہ

$$(ا, ا, ج, ب) = (ا, ا, ج, ب)$$

$$یا (ا, ا, ج, ب) = (ا, ا, ج, ب)$$

صرف یہ لازمی ہے کہ چار حرفوں میں سے (جو چلیپی نسبت میں استعمال کئے جائیں) تین حروف ہر زوج میں سے ایک حرف لینے سے بنائے جائیں۔

۸۱۔ مسئلہ۔ نقطوں کی کوئی سعت جو دریچ میں ہو

ایک سعت میں منطلل ہوگی جو دریچ میں ہوگی۔
فرض کرو کہ 'ا', 'ا', 'ب', 'ب', 'ج', 'ج' دریچ ہے اور فرض

کرو کہ انکے ظل متناظر چھوٹے حروف سے تعبیر کئے گئے ہیں۔

$$ا ب (ا, ب, ج, ا) = (ا, ب, ج, ا)$$

$$لیکن (ا, ب, ج, ا) = (ا, ب, ج, ا)$$

$$اور (ا, ب, ج, ا) = (ا, ب, ج, ا)$$

۱, ۱, 'ا', 'ب', 'ب', 'ج', 'ج' ایک دریچ بناتے ہیں۔

نوٹ۔ کسی دریچ کا مرکز اس دریچ کے مرکز میں منطلل نہیں ہوتا جو ظل سے حاصل ہوا ہے، لیکن دو ہرے نقطے دو ہرے نقطوں میں منطلل ہوتے ہیں۔

۸۲ - درپچ پنسل -

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک پنسل میں شاعوں کے زوج
 ط ف ط ف ط ق ط ق ط ر ط ر وغیرہ
 ایسے ہوں کہ کوئی قاطع ان شاعوں کو نقطوں کے زوجوں
 ا، ب، ج، د، ع، ف، گ، ح، ٹ، ڈ، ظ، ز وغیرہ
 میں قطع کرے اور ان نقطوں سے ایک درپچ بنے تو ہر قاطع اس پنسل کو اسی طرح
 قطع کریگا۔

ایسی کسی پنسل کو ”درپچ میں پنسل“ یا صرف درپچ پنسل کہتے ہیں
 درپچ پنسل کے دوہرے خطوط ط میں سے گزرنیوالے وہ خطوط (84)
 ہیں جن پر درپچ کے دوہرے نقطے جو مختلف قاطعوں سے حاصل ہوں
 واقع ہوتے ہیں۔
 یہ ذہن نشین رہے کہ دوہرے خطوط مزدوج شاعوں کے کسی زوج
 کے ساتھ موسیقی مزدوج ہوتے ہیں۔

اس واقعہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی درپچ پنسل کے دوہرے
 خطوط ط د اور ط د ہوں اور درپچ پنسل کی شاعیں
 ط ا ط ا تو ط د اور ط د اس درپچ پنسل کے لئے
 جس کے دوہرے خطوط ط ا اور ط ا ہیں مزدوج خطوط
 کا ایک زوج ہوں گے۔

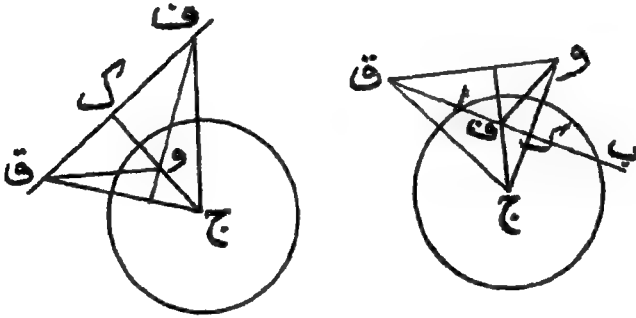
۸۳ - ذواربعۃ الاضلاع اور چار زاویوں کے درپچ خواص کسی آئینہ

باب تک جبکہ ہم مکافات سے بحث کریں گے ملوثی کئے جاتے ہیں اور اب ہم دائرہ کے دریچ خواص کو لیتے ہیں جو بڑی اہمیت رکھتے ہیں۔ مختصر ملوثی تراشوں کی بحث میں ہم انہیں کثرت سے استعمال کریں گے۔

۸۴۔ دائرہ کے دریچ خواص۔

مسئلہ۔ نقطوں کے زوج جو ایک دائرہ کے لئے مزدوج ہوں اور ایک خط پر واقع ہوں دریچ میں ایک سمت بناتے ہیں جس کے دوہرے نقطے خط اور دائرہ کے نقاط تقاطع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ خط ل پر ف اور ق مزدوج نقطوں کا ایک زوج ہیں۔ فرض کرو کہ ل کا قطب و ہے۔



اس طرح و ف ق ایک خود مزدوج مثلث ہے اور اس کا مرکز عمودی ج پر ہے جو دائرہ کا مرکز ہے (صفحہ ۱۱۶)۔

فرض کرو کہ ج سے ل پر عمود ج گ ہے۔

اب $ف گ \times گ ق = گ و \times گ ج$

$گ ف \times گ ق = گ و \times گ ج$

(85) پس ف اور ق ایک دریچ سے متعلق ہیں جس کا مرکز گ ہے اور جس کا مستقل $گ و \times گ ج$ ہے۔ اسلئے اسکے دوسرے نقطے حقیقی یا خیالی ہونگے جو جب اس کے مرکز ف اور ق کو قطع کرے یا نہ کرے۔

اگر $ف ق$ دائرہ کو $ا$ اور $ب$ پر قطع کرتا ہے تو $گ و \times گ ج = گ ا \times گ ب$ اسلئے $ا$ اور $ب$ دریچ کے دوسرے نقطے ہیں۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ $ا$ اور $ب$ دوسرے نقطے ہوتے چاہئیں کیونکہ ہر ایک اپنا آپ فردوج ہے۔

حسب ذیل مسئلہ جو اوپر کے مسئلہ کا متکافی ہے اس سے آسانی کے ساتھ ماخوذ ہوتا ہے۔

مسئلہ۔ ایک دائرہ کے لئے فردوج خطوں کے زوج جو ایک نقطہ میں سے گزریں ایک دریچ پسنل بناتے ہیں جس کے دوسرے خطوط اس نقطہ سے کھینچے ہوئے مماس ہونگے۔

کیونکہ ایک نقطہ میں سے گزرنیوالے فردوج خطوں کے جوڑے، و کے قطبی سے فردوج نقطوں کے جوڑوں پر ملیں گے، یہ نقطے ایک دریچ سے بناتے ہیں جس کے دوسرے نقطے وہ نقطے ہیں جن پر و کا قطبی دائرہ کو قطع کرتا ہے۔

اس لئے و میں سے گزرنیوالے فردوج خطوں کے جوڑے ایک دریچ پسنل بناتے ہیں جس کے دوسرے خطوط وہ خطوط ہیں جو و کو ان نقطوں سے ملاتے ہیں پر و کا قطبی دائرہ کو قطع کرتا ہے یعنی و سے دائرہ کے مماس۔

اگر دائرہ کے اندر ہو تو دوسرے خطوط حقیقی نہیں ہونگے۔

۸۵۔ قائم پنسل دریچ میں۔

دریچ پنسل کی ایک خاص صورت وہ ہے جس میں خطوں کے زوجوں میں سے ہر زوج 'قائمہ زاویہ بنا'۔

دفعہ ۸۴ کے دوسرے مسئلہ کی روش سے یہ ظاہر ہے کہ ایسی کوئی پنسل دریچ میں ہوگی کیونکہ ایک نقطہ پر خطوں کے وہ زوج جو علی القیوم ہوں کسی دائرہ کے فردوج قطر ہوتے ہیں جبکہ اس دائرہ کا مرکز اس نقطہ پر ہو۔ لیکن ہم اسے اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ علی القیوم خطوں کے زوج 'ط ف'، 'ط ق'، 'ط ب'، 'ط ا'، 'ط و'، 'ط خ' اور کوئی قاطع 'ت' انہیں تقطوں 'ا'، 'ب'، 'ب'، 'ق'، 'و'، 'خ' پر قطع کرتا ہے۔

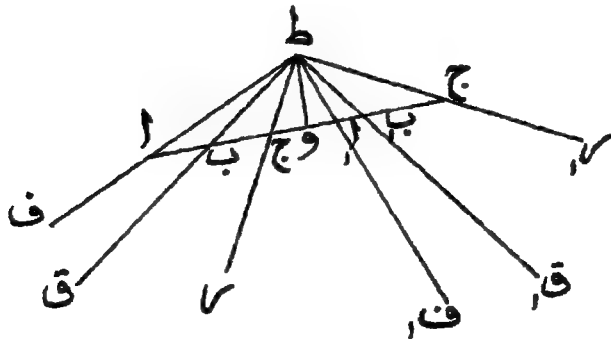
ت پر عمود ط و کھینچو۔ اب

$$وا \times و ا = و ط = و ب \times ب و$$

اسلئے تقطوں کے یہ زوج ایک دریچ سے متعلق ہیں جبکہ دوسرے

(86)

نقطہ خیالی ہیں۔ پس ایک نقطہ پر علی القیوم خطوں کے زوج دریچ پنسل بناتے ہیں جبکہ دوسرے خطوط خیالی ہیں۔



ایسے کسی دریچ کو قائم دریچ کہتے ہیں۔

یہ یاد رہے کہ اسی خاصیت کی مدد سے اس امر کی جانچ ہو سکتی ہے کہ آیا ایک نقطہ میں سے گزرنیوالے خطوں کے تین زون دریچ بن جائیں یا نہیں۔ اگر ان کو اس طور پر نظر کیا جائے کہ وہ زاوے جو ہر زون سے بنتے ہیں اس نخل میں قائمہ زاوے ہو جائیں تو یہ خطوط دریچ میں ہونے چاہئیں۔

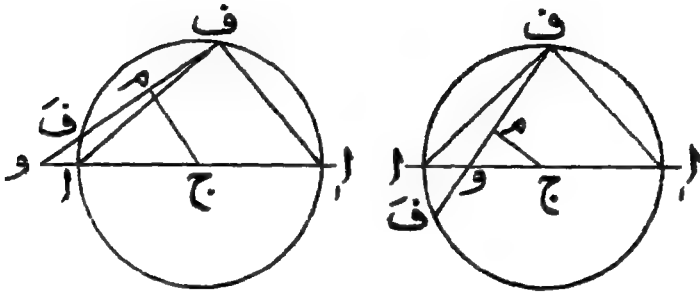
۸۶۔ مسئلہ۔ ہر دریچ پنسل میں شعاعوں کا ایک زون باہم علی القوائم ہوتا ہے اور ایک سے زیادہ ایسے زون نہیں ہو سکتے الا آنکہ دریچ پنسل قائم دریچ پنسل ہو۔

فرض کرو کہ دریچ پنسل کا اس ف ہے۔
کوئی قاطع لے لو اور فرض کرو کہ وہ اس دریچ سمیت کا مرکز ہے جو پنسل اس قاطع پر بنائی ہے اور فرض کرو کہ اس دریچ کا مستقل ک ہے۔
وہ کو ملاؤ اور وہ ف میں ایک نقطہ ف ایسا لکو کہ وہ $x \text{ ف} = ک$ ۔ اس لئے ف اور ف کے ایک ہی جانب یا مخالف جانبوں میں ہونگے بموجب اس کے کہ ک مثبت ہو یا منفی۔
ف ف کی تصدیق م پر کرو اور م ج ف ف کے علی القوائم کیچھو اور فرض کرو کہ م ج خط ل کو ج پر ملتا ہے۔
ج کو مرکز اور ج ف یا ج ف کو نصف قطر مانکر ایک دائرہ بناؤ جو ل کو ل اور ل پر قطع کرے۔
ہونگے کیونکہ

$$و ل \times و ل = و ف \times و ف = ک$$

نیز زاویہ ل ف ل نصف دائرہ میں ہونے کی وجہ سے زاویہ ل ف ل (87)

پس درپنج پنسل میں شعاعوں کا زوج ف ا اور ف ا ہے
ایسا کہ ف ا اور ف ا باہم علی القوائم ہیں۔
اُس خاص صورت میں جن میں و ف ف کا نقطہ وسطی ہو
ج اور و منطبق ہوتے ہیں۔



اُس صورت میں جن میں ف و ل پر عمود ہو ف ف کے وسطی
نقطہ ص میں سے گزرنے والا خط جو ف ف پر عمود ہے
ل کے متوازی ہو گا اور نقطہ ج لاتنا ہی پر ہو گا۔ اس صورت میں
ف و اور وہ خط جو ف ف میں سے گزرتا ہے اور ل کے متوازی
ہے قائم شعاعوں کا زوج ہونگے کیونکہ نقطہ و اور ل پر لاتنا ہی یہ نقطہ
درپنج سمت میں ایک دوسرے کے زوج ہیں۔
اس طرح ہر درپنج پنسل میں قائم شعاعوں کا ایک زوج ہوتا ہے۔
اگر پنسل میں ایک سے زیادہ قائم شعاعوں کے زوج ہوں تو سب زوج
علی القوائم ہونے چاہئیں کیونکہ شعاعوں کے دو زوج درپنج پنسل کی
پوری طرح انہیں کرتے ہیں۔

۸۷۔ مسئلہ۔ کوئی درپنج پنسل ایک درپنج پنسل میں منطبق

ہوتی ہے اور کوئی دریچ ایک قائم دریچ میں منظر کیا جاسکتا ہے۔
 فرض کرو کہ مستوی س میں نقطہ و پر کی ایک دریچ پنسل کی
 شعاعوں کے زوج مستویوں س اور س کے خط تقاطع سے
 نقطوں کے زوجوں 'ا'، 'ا'؛ 'ب'، 'ب'؛ 'ج'، 'ج' وغیرہ پر ملتے ہیں
 اور فرض کرو کہ و کا ظل و ہے۔

اب 'ا'، 'ا'؛ 'ب'، 'ب'؛ 'ج'، 'ج' وغیرہ ایک دریچ سمت ہے۔

و (ا'، 'ا'؛ 'ب'، 'ب'؛ 'ج'، 'ج' وغیرہ) ایک دریچ ہے۔

میں نیز چونکہ مستوی س میں کے دو زاویوں کو ہم قائمہ زاویوں میں
 منظر کر سکتے ہیں اس لئے ہم ایک دریچ کی شعاعوں کے دو زوجوں کے
 درمیانی زاویوں کا انتخاب انہیں قائمہ زاویوں میں منظر کرنے کے لئے
 کر سکتے ہیں۔ تب پنسل قائم پنسل میں منظر ہوتی جائے۔

(88)

یہ بھی ذہن نشین رہے کہ جب ہم دریچ پنسل کو قائم پنسل میں منظر
 کرتے ہیں تو اسکے ساتھ ہی کسی خط کو لاتنا ہی پر منظر کر سکتے ہیں (دفعہ ۳۴)۔
 نوٹ۔ چونکہ کسی قائم دریچ میں کوئی حقیقی دوہرے خطوط نہیں ہوتے
 اس لئے یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک دریچ پنسل کو قائم پنسل میں منظر کرنا ہو تو
 پنسل میں حقیقی دوہرے خطوط نہیں ہوتے چاہئیں درجہ ثل حقیقی نہیں ہو گا۔
 کوئی دریچ پنسل جس میں حقیقی دوہرے خطوط ہوں قائم پنسل میں
 صرف اس وقت منظر ہو سکتی ہے جبکہ ظل کا اس خیالی ہو۔

ہم نے جو کچھ یہاں بیان کیا ہے اسکو سمجھنے کے لئے طالب علم
 اسکا مقابلہ دفعہ ۳۴ کے ساتھ کر سکتا ہے جس میں دو دائرے جو خط کی
 تعین کرتے ہیں حقیقی نقطوں میں تقاطع نہیں ہوتے اگرچہ س میں
 کی دریچ پنسل سے خط مقدم پر جو دریچ سمت حاصل ہوتی ہے اسکے
 دوہرے نقطے حقیقی ہوں اور ظاہر ہے کہ یہ دوہرے نقطے حقیقی ہوں گے

اگر درپچ پنسل میں حقیقی دُورہرے خطوط ہوں -

مثالیں

۱- کوئی قاطع خط ہم محور دائروں کے ایک نظام سے نقطوں کے ایسے زوجوں

میں منقطع ہوتا ہے جو درپچ میں ہوتے ہیں اور درپچ کے دُورہرے نقطے دائروں کے نظام کے انتہائی نقطوں کے ساتھ ہم دائرگی ہوتے ہیں۔

۲- اگر ایک درپچ کے دُورہرے نقطے 'ک' 'گ' ہوں اور نقطے 'ا' 'ب' 'ب' بھی درپچ سے متعلق ہوں تو 'ا' 'ب' 'ب' 'ک' 'گ' درپچ میں ہونگے۔

۳- اگر ایک درپچ پنسل کے دُورہرے خطوط علی القوالم ہوں تو وہ ان زاویوں کے ناصف ہونے چاہئیں جو مزدوج شعاعوں کے ہر زوج کے درمیان ہیں۔
۴- دو مثلث 'ا ب ج' اور 'ا ب ج' مستوی منظرہ میں ہیں۔ ان کے متناظر اضلاع 'ب ج' 'ب ج' وغیرہ علی الترتیب 'ف' 'ق' 'س' میں متقاطع ہوتے ہیں اور خطوط 'ا' 'ب' 'ب' 'ج' خط 'ف' 'ق' 'س' کو علی الترتیب 'ف' 'ق' 'س' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سمت (ف' ق' 'س' 'س' 'س') ایک درپچ بناتی ہے۔

۵- ایک ذواربعۃ الاضلاع کے تین دُورہرے سے بننے والے مثلث کے حاطط دائرہ کامرکز ان تین دُورہرے پر بنائے ہوئے دائروں کے نظام کے بنیادی محور پر واقع ہوتا ہے۔

۶- ثابت کرو کہ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے متقابلہ راسوں کے دُورہرے میں سے ہر ایک، ایک دائرہ کے لحاظ سے مزدوج ہو تو راسوں کا تیسرا جوڑا بھی اِس دائرہ کے لحاظ سے مزدوج ہوگا اور یہ دائرہ ایک ہم محور نظام کا ایک مرکز ہوگا جسکا بنیادی محور وہ خط ہوگا جو ذواربعۃ الاضلاع کے دُورہرے کے نقاط وسطیٰ جو ہم خط ہوتے ہیں ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

۷۔ ایک نقطہ سے دو دائروں کے مماسوں کے جوڑے اور وہ دو خطوط
جو اس نقطہ کو دائروں کے مشابہت کے مرکوزوں سے ملاتے ہیں ایک دوسرے پر
۸۔ ثابت کرو کہ ایک دے ہوئے مثلث کے مستوی میں دو نقطے
ایسے ہیں کہ مثلث کے راسوں سے ہر ایک کے فاصلے ایک دی ہوئی
نسبت میں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملانے والا خط مثلث کے
حائط مرکزیں سے گزرتا ہے۔



نواں باب

مخروطی تراشیں

(90)

۸۸ - تعریفات - مخروطی تراشیں (یا مخروطیاں جیسا کہ انہیں اکثر کہا جاتا ہے) وہ منحنی ہیں جو کسی مستوی پر ایک دائرہ کا مخروطی یا انتصابی ظل لینے سے حاصل ہوتے ہیں، یہ مستوی دائرہ کے مستوی سے علیحدہ ہوتا ہے پس وہ (مخروطی تراشیں) ایک مستدیر قاعدے والے مخروط کی مستوی تراشیں ہیں۔ یہ ضروری نہیں ہے کہ مخروط ایک قائم مستدیر مخروط یعنی ایسا مخروط ہو جس کا اس اس خط پر واقع ہو جو مستدیر قاعدے کے مرکز میں سے گزرے اور اس پر عمود ہو۔ صرف اس بات کی ضرورت ہے کہ مخروط کا قاعدہ مستدیر ہو (اور اس لئے اس کی وہ تمام تراشیں جو قاعدہ کے متوازی ہوں دائرے ہوں گی) اور ایسی صورت میں اس کی تراشیں مخروطی تراشیں کہلاتی ہیں۔

۸۹ - مخروطی تراشوں کی تقسیم اس رشتہ کی ہو جب کیجاتی ہے جو خط منعدم کو اس دائرہ کے ساتھ ہوتا ہے جس کی تطلیل کی جاتی ہے۔ اگر خط منعدم اس دائرہ کو مس کرتا ہے تو ظل کے منحنی کو قطع مکانی کہتے ہیں

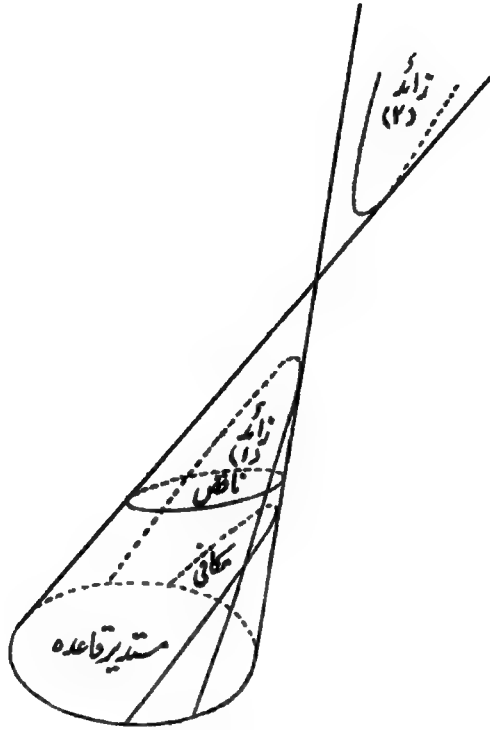
اگر خط منعدم دائرہ سے نہیں ملتا تو منحنی کو قطع ناقص کہتے ہیں اور اگر خط منعدم دائرہ کو قطع کرتا ہے تو طرسل کے منحنی کو قطع زائد کہتے ہیں۔

دوسرے الفاظ میں قطع مکانی ایک مستدیر مخروط کی وہ تراش ہے جو مخروط کے ایک تکوینی خط کے متوازی مستوی سے کٹی ہوئی ہے، تکوینی خط سے مراد وہ خط ہے جو مخروط کے راس کو قاعدے کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے ملتا ہے۔ قطع ناقص مخروط کی وہ تراش ہے جو ایک ایسے مستوی سے کٹی ہوئی ہے کہ راس میں سے گزرنے والا متوازی مستوی مخروط کے قاعدہ کے مستوی کو قاعدہ سے باہر ایک خط پر قطع کرتا ہے۔

قطع زائد مخروط کی وہ تراش ہے جو ایک ایسے مستوی سے کٹی ہوئی ہے کہ راس میں سے گزرنے والا متوازی مستوی مخروط کے قاعدے کو قطع کرتا ہے۔

91) شکل ذیل میں ان منحنیوں کی مثال دی گئی ہے اور یہ

دیکھا جاسکتا ہے کہ قطع زائد دو شاخوں پر مشتمل ہوتا ہے اور ان دو شاخوں کو حاصل کرنے کے لئے مخروط کو اس کے راس کے دونوں جانب بڑھانا پڑتا ہے۔



۹۰۔ ماسکہ اور مرتب -

ہر مخروطی تراش یا دائرہ کے ظل میں حسب ذیل خاصیت ہے ہم ابھی ثابت کرینگے پانی جاتی ہے : ہر مخروطی تراش ایک مستوی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق ہوتی ہے کہ اسی مستوی میں کے ایک ثابت نقطہ سے اسکا فاصلہ اسی مستوی میں کے ایک ثابت خط سے اس کے فاصلہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس ثابت نقطہ کو مخروطی کا ماسکہ کہتے ہیں ثابت خط کو مرتب کہتے ہیں اور مستقل نسبت خروج المرکز کہلاتی ہے۔ آئندہ ہم ثابت کرینگے کہ اگر خروج المرکز اکائی ہو تو مخروطی قطع مکانی ہوگا، اکائی سے کم ہو تو قطع ناقص اور اکائی سے

بڑا ہو تو قطع زائد۔

(92)

۹۱۔ ہندسی مخروطات کی کتابوں میں بالعموم مولفین منحنیوں کی اس خاصیت (یعنی ماسکہ اور مرتب کی متذکرہ بالا خاصیت) کو انہی تعریف کے طور پر لیتے ہیں اور ان کے خواص اس سے اخذ کرتے ہیں اور ایسا کرنے میں اس واقعہ کا خیال نہیں کرتے کہ ہر مخروطی تراش خواہ اس کی تعریف ماسکہ اور مرتب کی خاصیت سے ہی کی جائے کسی نہ کسی دائرہ کا ظل ہے۔ یہ امر قابل افسوس ہے۔ کیونکہ بہت سے خواص جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت سے صرف بڑی محنت سے ہی اخذ کئے جاسکتے ہیں وہی خواص مخروطیوں کو ایک دائرہ کے ظل سمجھنے سے بہت آسانی سے ثابت ہو جاتے ہیں۔ ہم آئندہ باب میں یہ دکھائی گئے کہ یہ ثابت کرنا کس قدر آسان ہے کہ وہ مستوی سطحی جن میں ماسکہ اور مرتب کی خاصیت موجود ہو ایک دائرہ کے ظل ہوتے ہیں۔

۹۲۔ قطبی خواص۔

مخروطی تراشیں چونکہ ایک دائرہ کے ظل ہیں اس لئے ان میں دائرہ کے تمام قطبی خواص ہونے چاہئیں چنانچہ (۱) وہ ایسی ہوں گی کہ ان کے مستوی میں کاکوئی خط انہیں دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کریگا اور ان نقطوں سے جو دائرہ کے مستوی میں کے ان نقطوں کا ظل ہوں جو دائرہ سے باہر واقع ہیں وہ صرف دو تماس کھینچے جاسکیں گے جو دائرہ کے تماسوں کے ظل ہونگے۔ (۲) مخروطی تراشیں صریحاً دائرہ کی ”قطب اور قطبی کی خاصیت“ رکھیں گی۔ یعنی اگر ایک دئے ہوئے نقطہ میں سے گزرنے والے وتروں کے سرروں پر تماسوں کے زوج کھینچے جائیں تو ان زوجوں کے نقاط تقاطع ایک خط پر واقع ہونگے، اس نقطہ اور اس خط کو ایک دوسرے کے لحاظ سے قطب اور قطبی کہا جاتا ہے۔ جس نقطہ سے ممحنی کے تماس کھینچے جائیں اس کا

قطبی وہی خط ہوگا جو ان ماسوں کے نقاط تماس میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہو۔ اس خط کو اکثر ”وتر تماس“ کہا جاتا ہے لیکن صحیح معنوں میں یہ وتر خط کا صرف وہ حصہ ہوتا ہے جو منحنی سے منقطع ہوتا ہے۔ قطبی طول میں غیر محدود ہوتا ہے۔

(۳) اگر بلحاظ ایک مخروطی کے ایک نقطہ ۱ کا قطبی ج میں سے گذرے تو ب کا قطبی ۱ میں سے گذرنا چاہئے۔ ایسے دو نقطوں کو مزدوج نقطے کہتے ہیں۔

(۴) نیز اگر ایک خط ل کا قطب دوسرے خط ل پر واقع ہو تو ل کا قطب ل پر واقع ہوگا۔ ایسے دو خطوں کو مزدوج خطوط کہا جاتا ہے۔

(۵) قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت جو دائرہ کے لئے حاصل ہوتی ہے مخروطی تراشوں کے لئے بھی درست رہتی ہے کیونکہ تقطیل سے قطبی نسبتیں نہیں بدلتیں۔

(۶) چونکہ ایک درپچ سعت بھی ایک درپچ سعت میں منطیل ہوتی ہے اس لئے ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج نقطوں کے زوج جو ایک خط پر واقع ہوں ایک درپچ سعت بنائینگے جس کے دوسرے نقطے وہ نقطے (اگر موجود ہوں) بنائینگے جن پر خط منحنی کو قطع کرتا ہے۔

(۷) اسی طرح ایک نقطہ میں سے گذرنے والے مزدوج خطوط کے زوج ایک درپچ منسل بنائیں گے جس کے دوسرے خطوط (اگر وہ موجود ہوں) اُنس نقطہ سے کھینچے ہوئے تماس ہونگے۔

۹۳۔ دائرہ جسکی تقطیل ایک دوسرے دائرہ میں کھائی ہو

ایک دائرہ کے ظل کا منحنی بعض شرطوں کے تحت ایک دوسرے دائرہ ہوگا۔

مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ کے ظل کے منحنی میں نقطہ
ن میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں کے زوج ایک
قائم درپچ بنائیں جہاں ن خط مستقیم کے قطب کا ظل
ہے تو ظل کا منحنی ایک دائرہ ہوگا جسکا مرکز ن پر ہوگا۔
چونکہ ن کا قطبی لاتنا ہی پر کا خط ہے اسلئے ن میں سے

گذرنیوالے کسی وتر کے سروں پر کے تماس لاتنا ہی پر ملینگے۔ لیکن چونکہ وہ
درپچ پنسل جو ن میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے
ایک قائم درپچ پنسل ہے اسلئے یہ تماس ن میں سے گزرنے والے
ایک ایسے خط پر ملنے چاہئیں جو وتر پر عمود ہے۔ پس وتر کے سروں پر
کے تماس اس کے علیٰ نقوائم ہوں گے۔

اس طرح یہ منحنی یہ خاصیت رکھتا ہے کہ اس کے ہر نقطہ پر کا تماس
اس نصف قطر پر عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ کو ن سے ملاتا ہے۔ یعنی یہ
منحنی ایک دائرہ ہے جسکا مرکز ن ہے۔

نتیجہ صریح۔ ایک دائرہ کی تطیل ایک دوسرے دائرہ
میں اس طور پر کیجا سکتی ہے کہ اسکے اندر کا کوئی نقطہ مرکز میں
مظلل ہو۔

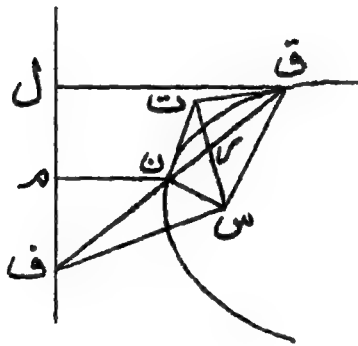
کیونکہ ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ اس نقطہ کے قطبی کو لاتنا ہی پر مظلل
کریں اور اس میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں سے جو درپچ پنسل
حاصل ہوا اسکو ایک قائم درپچ میں مظلل کریں۔
نوٹ۔ وہ نقطہ جسے مرکز میں مظلل کرنا ہو دائرہ کے اندر ہونا چاہئے

ورنہ ظل حقیقی نہیں ہوگا (دیکھو نوٹ دفعہ ۸۷)

۹۴۔ ماسکہ اور مرتب کا قطب اور قطبی ہونا۔

مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ کے ظل کے منحنی کے مستوی میں ایک نقطہ سے ایسا موجود ہو کہ وہ ڈیپچ پنسل جو اس میں سے گزرنیوالے فردوج خطوں سے بنے ایک قائم ڈیپچ پنسل ہو تو اس اور اس کا قطبی ظل کے منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہونگے۔

فرض کرو کہ منحنی پر ن اور ق کوئی دو نقطے ہیں اور فرض کرو کہ ان پر کے تماس ت پر ملتے ہیں۔



مس ت کو ملاؤ اور فرض کرو کہ مس ت، ن ق کو کا پر قطع کرتا ہے اور ن ق، مس کے قطبی سے ف پر ملتا ہے۔ مس ف کو ملاؤ اور ن م، ق ل، مس کے قطبی پر عمود کھینچو۔ اب مس ت، ف کا قطبی ہے کیونکہ ف کا قطبی مس میں

گزرتا ہے اس وجہ سے کہ \sin کا قطبی ϕ میں سے گزرتا ہے اور وہ نیزت میں سے بھی گزرتا ہے کیونکہ \tan کا قطبی ϕ میں سے گزرتا ہے۔

۱۰ \sin ϕ اور \sin t مزدوج خطوط ہیں۔
لیکن بموجب فرض \sin پر کے مزدوج خطوط ایک قائم دیہیج بناتے ہیں

۱۱ \tan ϕ قائم زاویہ ہے۔

اور قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے

(ϕ کا \tan q) = ۱۔

۱۲ \sin t اور \sin ϕ زاویہ n \sin q کے صفت ہیں (دفعہ ۷۲)۔

۱۳ \sin n : \sin q = \tan : \tan q
= \sin : \sin q (مشابہ مثلثوں)

۱۴ \sin n : \sin q = \sin : \sin q
اس لئے نقطہ \sin سے منحنی پر کے نقطوں کا جو فاصلہ ہے اس میں اور اس فاصلہ میں جو ان نقطوں کا \sin کے قطبی سے ہے مستقل نسبت ہے یعنی \sin اور اس کا قطبی علی الترتیب منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہیں۔

نوٹ۔ اگر \sin کا قطبی لائٹناہی پر کا خط ہو تو قبل کا منحنی ایک دائرہ ہوگا (دفعہ ۹۳)۔

ہم یہاں یہ کہہ سکتے ہیں کہ دائرہ کے متعلق یہ خیال کیا جاسکتا ہے کہ وہ ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے، ماسکہ مرکز پر ہوگا اور مرتب لائٹناہی پر کا خط ہوگا۔ اسکا خروج المرکز وہ نسبت ہے جو اس کے نصف قطر کو اس لائٹناہی فاصلہ کے ساتھ ہے جو لائٹناہی پر کے خط سے دائرہ کے نقطوں کا ہے۔

۹۵۔ متوازی وتر۔

ہم اول متوازی وتروں کے متعلق ایک بہت ہی اہم مسئلہ ثابت کرینگے اور اس کے بعد ایک دائرہ کے ظل کے منحنیوں کی مرتبہ اور اس کے خاصیت یہ دکھا کر ثابت کرینگے کہ ان تمام منحنیوں کیلئے کم از کم ایک نقطہ می موجود ہوتا ہے جس میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں زوج ایک قائم در بیچ بناتے ہیں۔

مسئلہ۔ کسی مخروطی تراش (یا دائرہ کے ظل کے منحنی) میں متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہوتا ہے اور یہ خط منحنی سے جن نقطوں پر ملتا ہے ان پر کے مماس وتروں کے متوازی ہوتے ہیں۔
مزید بریں متوازی وتروں میں سے ہر ایک کے سرے کے مماس اس خط پر متقاطع ہونگے جو وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ہے اور ہر وہ خط جو وتروں کے متوازی اور منحنی کے مستوی میں ہو اس خط کے ساتھ جس میں وسطی نقطے واقع ہیں مزدوج ہوگا۔

فرض کرو کہ متوازی وتروں کے نظام میں سے ایک وتر قق ہے اور اس کا وسطی نقطہ ہر ہے۔
ان وتروں کے متعلق یہ خیال کیا جاسکتا ہے کہ وہ لاتنا ہی پر کے ایک نقطہ کا پر جو خط منعدم پر کے ایک نقطہ کا ظل ہے متقاطع

ہوتے ہیں۔ چنانچہ حاصل ہوتا ہے

(زَقَقَ، مَرَّ) = ۱-

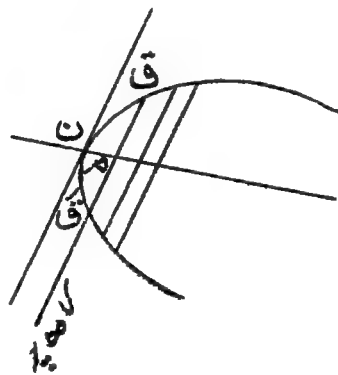
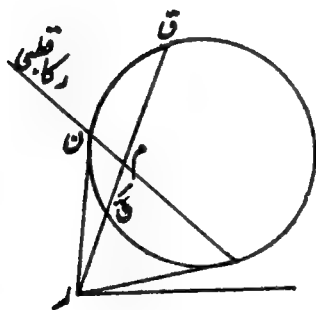
(ق ق ' م /) = ۱ -

یعنی م، ر کے قطبی پر ہے۔

ایس چونکہ نقطہ م کا طریقی ایک خط ہے اس لئے نقطہ م کا طریق بھی ایک خط ہے۔

(96) فرض کرو کہ 'ن' ایک نقطہ ہے جس پر یہ طریق معنی سے ملتا ہے اور فرض کرو کہ 'ن' کا نفل ہے، تب چونکہ 'ن' پر کا محاسن میں سے گزرتا ہے 'ن' پر کا محاسن میں سے گزرتا ہے۔ یعنی 'ن' پر کا محاسن 'ق' کے متوازی ہے۔

اور قی پر کے ماس کے قطبی کے ظل پر بیٹھے یعنی اس خط پر جو دتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ہے۔



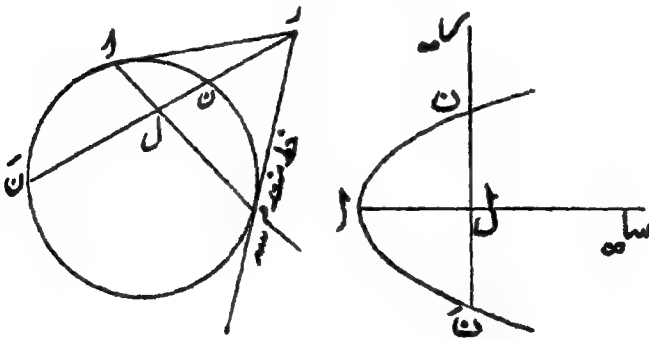
نیز اس میں سے گزرتیوالے ہر خط کا قطب اور اس کے قطبی پر ہوگا اور اس لئے کہ اس میں سے گزرتیوالے ہر خط جو مخروطی کے مستوی میں ہوگا قطب خط N پر ہوگا یعنی ہر وہ خط جو دائروں کے متوازی ہو

ان کے وسطی نقطوں کے طریق کے ساتھ مزدوج ہوگا۔
دوسرے الفاظ میں اس خط پر کے ہر نقطہ کا قطبی جو متوازی دھروں کے
ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ہے ایک خط ہوگا جو دھروں کے
متوازی ہوگا۔

۹۶۔ ماسکہ اور مرتب کی خاصیت کا ثبوت۔

اب ہم مخروطی تراشوں کی (جنکی تعریف ایک دائرہ کے غلوں کے
طو پر کی گئی ہے) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت ثابت کر سکتے ہیں۔ ہم قطع مکانی قطع
ناقص اور قطع زائد کو ایک ایک کر کے لیں گے اور ہر صورت میں ایک ابتدائی
مسئلہ ثابت کرینگے جو ان کے تشاکل کے محوروں سے متعلق ہوگا۔

مسئلہ۔ قطع مکانی (یا دائرہ کا ظل جبکہ خط مستقیم دائرہ کو اس کے
مستوی میں مس کرے) تشاکل کا ایک محور رکھتا ہے جو منحنی سے
دو نقطوں پر ملتا ہے جن میں سے ایک لاتنا ہی پر ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ خط مستقیم منحنی سے ملتا ہے۔
اس مستوی میں جو ظل کے راس خط اور خط مستقیم میں سے

گذرتا ہے ایک خط $r'p$ سے r کے علی القوائم کھینچو جو خط منعدم سے
 r میں ملے۔ دائرہ کا دوسرا محاس r لکھینچو۔
 اب r سے r' کا قطب ہے اور اس لئے اگر n کوئی وتر ہو
 جو r ہانے پر r میں سے گذرتا ہے اور r سے r' کو ل پر قطع کرتا ہے تو

(n ، r) = r ۔
 پس n میں متناظر بڑے حروف استعمال کرنے اور یہ یاد رکھنے
 سے کہ r سے ایک قائمہ زاوے میں n کا کیونکہ r سے r' پر
 ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے ہمیں ایک وتر n حاصل ہوگا جو
 r سے r' کے علی القوائم ہوگا اور اسے r پر قطع کریگا اور اس لئے
 (n ، r') = r ۔

لیکن r لاتنا ہی پر ہے
 n ، r = r ۔
 اس طرح وہ تمام وتر جو r سے r' پر عمود ہوں اس سے تنصیف
 ہوتے ہیں اور اس لئے منحنی اس خط کے گرد متشکل ہے، اس خط کو
 قطع مکانی کا محور کہتے ہیں۔

یہ محور منحنی سے نقطہ r پر ملتا ہے جسے r اس کہتے ہیں اور منحنی کے
 ساتھ اس کا جو دوسرا نقطہ تقاطع r' ہے وہ لاتنا ہی پر ہوتا ہے۔
 چونکہ r سے r' ایک قائمہ زاوے میں n پر ملتا ہے (کیونکہ
 r سے r' پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے) اس لئے r پر کا محاس محور کے
 علی القوائم ہے۔
 بالآخر منحنی، لاتنا ہی پر کے خط کو r سے r' پر ملتا ہے۔

۹۔ مسئلہ۔ قطع مکانی (یا دائرہ کا ظل جبکہ خط منعدم
 دائرہ کو مس کرے) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے اور اس
 منحنی کا خروج المکرر اکائی ہوتا ہے۔

(98)

فرض کرو کہ ٹیس کے منحنی پر کوئی نقطہ N ہے۔ فرض کر دو کہ N میں سے گزرنیوالا وتر LN ہے جو محور پر عمود ہے اور اسے L پر قطع کرتا ہے۔

ن اور ن پر کے ماس محور کے خط پر ایک نقطہ ت پر
متعلق ہونگے (صفحہ ۹۵)۔

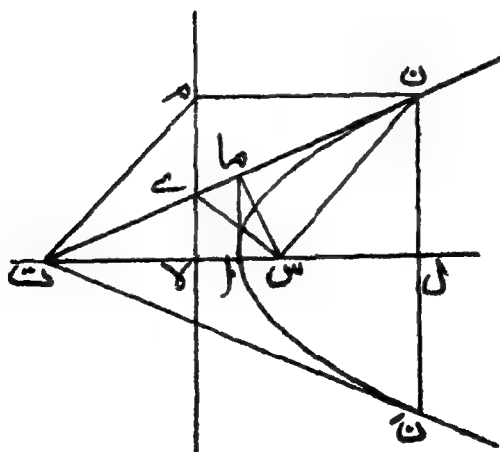
اب چونکہ N کا قطب T ہے اسلئے

(ت لی، سا) = -ا

∴ $t_1 = t_2$ کیونکہ مسا لاتنا ہی یہ ہے۔

اب فرض کرو کہ ن پر کا ماس' (۱) پر کے ماس سے نقطہ ما پر
 ملتا ہے۔ ماس' ن ما پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ محور سے سن
 پر ملتا ہے۔

مس کا قطبی محور کے علی القوائم ہوگا (دفعہ ۹۵)۔ فرض کرو کہ یہ قطبی لامر ہے اور وہ محور کو لایبر 'ن پر کے ماس کو سے پڑ اور ن میں سے گزرنے والے محور کے متوازی خط کو ہر پر قطع کرتا ہے۔ مس 'ن' مس سے کو ملاؤ۔



اب چونکہ لام کا قطب س ہے اس لئے
(لا س) (سا) = ا-
لا = ا س اور چونکہ ت = ا = ال اس لئے ت س
= لا ل = م ن
لیکن ت ما : مان = ت : ا : ال = ا ، اس لئے
ت ما س = ت ما س اور ت س = ن س -
پس ن س = ن م یعنی ن ، س سے اور س
کے قطبی سے مساوی فاصلہ پر ہے -

(99) نیز چونکہ س ت ' ن م کے مساوی اور اسکے متوازی ہے اور
س ن = زائوس لئے س ن م ت ایک معین (Rhombus)
ہے اور ن ت ، زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے -

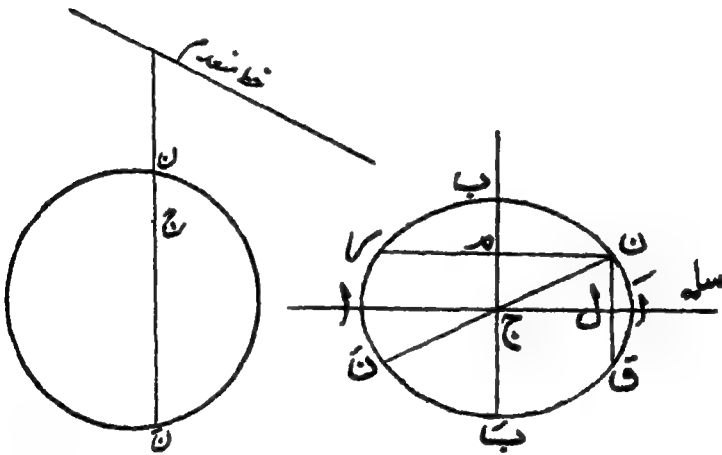
اس طرح م س ن = م ن =
اور م س ن = م ن = ایک قائمہ زاویہ
اب س ن کا قطب م ہے کیونکہ م کا قطبی س میں
سے (جسکی وجہ یہ ہے کہ س کا قطبی م میں سے گذرتا ہے) اور
ن میں سے (کیونکہ م ن ، ن پر ماس ہے) گذرنا چاہئے -
پس س سے اور س ن ، منحنی کے مزدوج خطوط ہیں
اور وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں - اسی طرح س ت اور وہ
خط جو س میں سے گذرتا ہے اور س ت پر عمود ہے مزدوج خطوط
ہیں -

اس لئے وہ درپیش پینل جو س میں سے گذرنے والے مزدوج
خطوں کے زوجوں سے بنتی ہے ایک قائم درپیش پینل ہے - اس طرح
س اور اس کا قطبی لام علی الترتیب منحنی کا ماسکہ اور مرتب ہیں
اور خروج مرکز س ن : ن م ہے جو اکائی ہے -

۹۸ - دائرہ کا وہ قتل جبکہ خط منعدم دائرہ سے نہ ملے یا تو

ایک دائرہ ہو گا یا ایک بند منحنی جس کے تشاکل کے دو باہم
عمودوار محور ہونگے جنہیں منحنی غیر مساوی طول کے وتر منقطع کرے گا۔
فرض کرو کہ خط مستقیم کا قطب ج ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ کا کوئی وتر ن ن ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔



تب ن ن، ج پر اور ج کے قطبی کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع
پر موسیقی طور پر تقسیم ہوتا ہے۔

(100)

غل میں متناظر ب حروف استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا
کہ ج میں سے گزرنے والا وتر ن ن، ج پر اور ج کے قطبی
کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے جہاں
ج کا قطبی لاتنا ہی پر کا خط ہے۔

ن ج = ج ن ج
اس طرح ج میں سے گزرنے والا ہر وتر ج پر تنصیف ہوتا ہے۔

اسی وجہ سے نقطہ ج کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں اور اس میں سے گزرنے والے
دوتروں کو قطر کہتے ہیں۔

کسی قطر کے سروں پر کے ماس متوازی ہوتے ہیں کیونکہ ج میں
سے گزرنے والے (دائرہ کے) دوتروں کے سروں پر کے ماس ج کے
قطبی پر ملتے ہیں جو خط منعدم ہے۔

اول فرض کرو کہ وہ درپیش پنسل جو ج میں سے گزرنے والے
مزدوج خطوں کے زوجوں سے بنتی ہے ایک قائم درپیش پنسل ہے
تو ظیل کا منحنی ایک دائرہ ہوگا (دفعہ ۹۳)۔

ثانیاً فرض کرو کہ درپیش پنسل قائم نہیں ہے تو ج میں سے
گزرنے والے مزدوج خطوں کا ایک اور صرف ایک زوج یا ہم علی القوام
ہوتا چاہیے (دفعہ ۸۶)۔

فرض کرو کہ منحنی ان خطوں پر وتر ا ا اور ب ب منقطع
کرتا ہے۔

وتر ن ق اور ن س، ا ا اور ب ب پر عمود کھینچو اور
فرض کرو کہ یہ عمود انہیں علی الترتیب ل اور م پر قطع کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ ا ا اور ب ب کے خطوں پر لاتنا ہی پر کے نقطے
سسا اور سسا ہیں۔

اب چونکہ ا ا کا قطب سسا ہے اور ن ق، سسا میں سے
گزرتا ہے اس لئے

$$(ن ق، ل سسا) = ۱ -$$

$$ن ل = ل ق$$

$$ن م = م س$$

اسی طرح

اس طرح منحنی ان دو خطوں ا ج ا، ب ج ب میں سے
ہر ایک کے گرد متشکل ہے۔ ان خطوں کو محور کہتے ہیں۔

جبکہ دائرہ کو خط متعدد اُس کے مستوی میں نہ ملے اور دائرہ کا
ظل ایک دوسرا دائرہ نہ ہو) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت
رکھتا ہے اور اس منحنی کا خروج المرکز اکائی سے کم ہوتا ہے۔
یہ تسلیم کر لینے کے بعد کہ ظل دائرہ نہیں ہے ہمیں دفعہ ۹ کی جنوب
تشاکل کے دو محور (ا) اور ب ب حاصل ہوتے ہیں جن میں سے
(ا) بڑا ہے۔

ب کو مرکز مانکر اور ج (ا) کے مساوی نصف قطر لیکر ایک
دائرہ بناؤ جو محور اعظم کو لیں اور اس پر قطع کرے۔
اس اور اس کے قطبی (ا) پر عمود ہوں گے (دفعہ ۹۵)۔

فرض کرو کہ یہ عمود لا ف اور لا ف ہیں جو (ا) کو لا اور لا
پر اور ب پر کے ماس کو ف اور ف پر قطع کرتے ہیں۔
اب چونکہ اس کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے اسلئے ف
کا قطبی اس میں سے گذریگا لیکن ف کا قطبی ب میں سے
گذرتا ہے کیونکہ ف ب ماس ہے۔

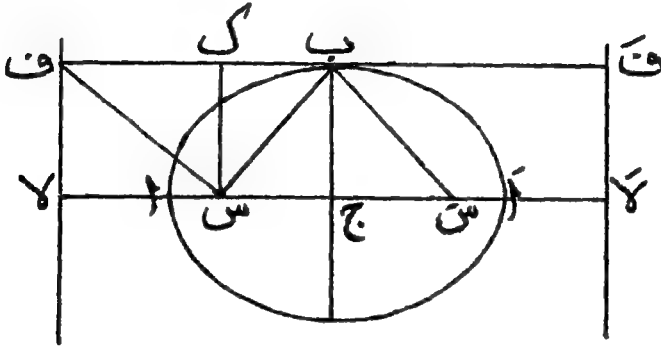
اس ب، ف کا قطبی ہے اور اس ف اور اس ب
مزدوج خطوط ہیں۔

ہم ثابت کرینگے کہ یہ مزدوج خطوط باہم علی لقو اٹھ ہیں۔
چونکہ اس، لا ف کا قطب ہے اس لئے

$$(ا) (اس) لا = ا$$

اب اس ج، ج لا = ج (ا)
ب اس ج، ج ب کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ
ب ف سے گ پر ملتا ہے۔ تب

بک × گ ف = ج س × س لا = ج س (ج لا - ج س)
 ج = ج ۱ - ج ۲
 = س ب ۱ - ج س ۲ = س گ ۱
 یہ ف س ب ایک قائمہ زاویہ ہے۔



اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ س میں سے گزرنے والے مزدوج
 خطوں کے دو زوج یعنی س ف ، س ب اور س لا ،
 س گ باہم علی القوائم حاصل ہوتے ہیں اس لئے وہ درمیچ
 پنسل جو س پر کے مزدوج خطوں سے بنتی ہے ایک قائمہ درمیچ
 پنسل ہے۔

یہ س اور اس کا قطبی لا ف ، منحنی کا اسکہ اور مرتب ہیں
 (دفعہ ۹۲)۔

اسی طرح س اور اس کا قطبی لا ف ، اسکہ اور مرتب ہیں۔
 خروج المرکز = س ب : ب ف = ج ۱ : ج لا
 جو اکائی سے کم ہے۔

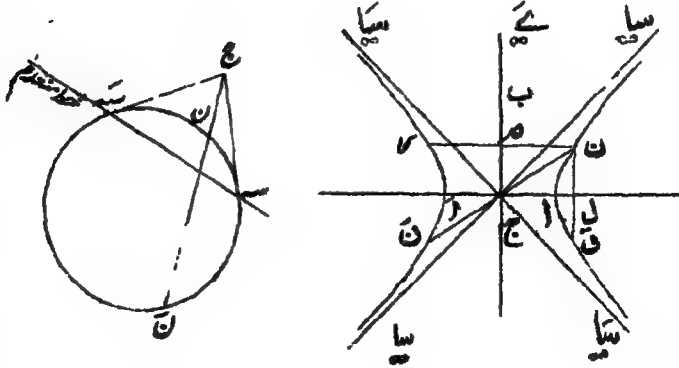
یہ بھی قابل یادداشت ہے کہ چونکہ ج س × ج لا = ج ۱
 اس لئے خروج المرکز = ج س × ج ۱ -

نوٹ - اب ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ کس طرح ایک دائرہ کو ایک قطع ناقص کی انتہائی صورت سمجھا جا سکتا ہے جبکہ ماسکے میں اور میں اس کے مرکز پر منطبق ہوں اور اس کا مرتب لائنہ ہی پر کا خط ہو (دیکھو نوٹ دفعہ ۹۴)۔

۱۰۰ - قطع زائد (یا ایک دائرہ کا ظل جبکہ دائرہ کو خط منعدم قطع کرے) تشاکل کے دو نمونہ رکھتا ہے جو باہم علی القیوالم ہوتے ہیں اور جن میں سے صرف ایک منحنی کو قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ خط منعدم دائرہ کو نقطوں سے اور سے پر قطع کرتا ہے اور فرض کرو کہ اس خط کا قطب ج ہے۔
فرض کرو کہ ن ن کوئی وتر ہے جس کا خط ج میں سے گزرتا ہے تو ن ن ج پر اور سے سے کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوگا۔

108)



نخل میں متناظر بڑے حروف استعمال کرنے سے معلوم ہوگا کہ ج میں سے گزرنے والا دتر ن 'ج پر اور ج کے قطبی کے ساتھ اس کے نقطہ تقاطع پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے جہاں ج کا قطبی لائن اس پر کا خط ہے۔

ن ج = ج ن

پس نخل کے منحنی میں ہر وہ دتر جو ج میں سے گزرتا ہے ج پر تصنیف ہوتا ہے، اس لئے ج کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں اور ج میں سے گزرنے والے دتر قطر کہلاتے ہیں۔

یہ یاد رہے کہ ج میں سے گزرنے والا ہر خط منحنی سے نہیں ملتا کیونکہ دائرہ کے مستوی میں ایسے خطوط موجود ہیں جو ج میں سے گزرتے ہیں لیکن دائرہ کو قطع نہیں کرتے۔

ج میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں کے ہر زوج میں صرف ایک خط دائرہ سے ملے گا کیونکہ ج سے اور ج سے اس مزدوج کے دوہرے خطوط ہیں جو ان مزدوج خطوں سے ملتا ہے۔

میزوہ درہج پنسل جو ج میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے ایک قائم پنسل نہیں ہو سکتی کیونکہ وہ حقیقی دوہرے خطوط رکھتی ہے۔ یعنی ج سے اور ج سے کے نخل۔

اس لئے ج میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں کا ایک اور صرف ایک زوج باہم علی القوائم ہوگا (دفعہ ۱۶)۔

درہج کرہ کہ مزدوج ج اور ج ج ہے جنہیں سے ج اور ج سے ملتا ہے یعنی ا اور ا پر۔

یہ یاد رہے کہ ج سے نخل کے منحنی کے تماس دو ہونگے جنکے نقاط تماس سما اور سما جو سے اور سے کے نخل ہیں لائن اس پر ہونگے

ان تماسوں کو متقارب کہتے ہیں۔

چونکہ ج مسا اور ج مسا اس درمیچ پسل کے دوسرے خطوط
ہیں جو ج میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں سے بنتی ہے اسلئے

ج (سا مسا) (ب) = ۱۔ (دفعہ ۸۲)

چونکہ ج اور ج ب باہم علی القواکم ہیں وہ ج مسا اور
ج مسا کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہیں (دفعہ ۷۲)۔ کل
اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ منحنی ج (ا) اور ج ب کے گرد مشا
ہے ن ق اور ن م ج (ا) اور ج ب پر عمود کھینچو اور فرض
کرو کہ یہ عمود ج (ا) اور ج ب کو ل اور م پر قطع کرتے ہیں۔ فرض
کرو کہ ج (ا) اور ج ب پر لاتا ہی پر کے نقطے مے اور مے ہیں
تب چونکہ (ا) کا قطب مے ہے اور ن ق مے میں سے گزرتا
ہے اس لئے

(ن ق ل مے) = ۱۔

ن ل = ل ق

اسی طرح م م = م م

پس منحنی تشاگل کے دو محور باہم علی القواکم رکھتا ہے جنہیں سے
ایک منحنی سے ملتا ہے اور دوسرا نہیں۔ (ا) جو منحنی سے ملتا ہے
قاطع محور کہلاتا ہے اور ج ب کو مزدوج محور کہتے ہیں۔

نوٹ۔ فی الحال ب، ج ب پر کوئی معین نقطہ نہیں ہے
آئندہ اس نقطہ کو معین کرنے میں سہولت ہوگی۔ یہاں جس بات پر
زور دینا مقصود ہے وہ یہ ہے کہ مزدوج محور منحنی کو قطع نہیں کرتا اور ہم
اس پر نقطے ب اور ب اس طرح متعین نہیں کر سکتے جیسا کہ ہم نے
قطع ناقص کی صورت میں کیا تھا۔

۱۰۱۔ مسئلہ۔ قطع زائد (یا ایک دائرہ کے ظل کا منحنی

جبکہ خط مستقیم دائرہ کو قطع کرے) ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے اور اسکا خروج المرکز اکائی سے بڑا ہوتا ہے۔
 دفعہ سابق کی ترقیم استعمال کرو اور ج کو مرکز اور ج ا کو نصف قطر مانکر ایک دائرہ کھینچو جو ج مسا کو گ اور گ پر اور ج مسا کو گ اور گ پر قطع کرے۔ دیکھو شکل۔
 خطوط گ گ اور گ گ قاطع محور پر عمود ہونگے کیونکہ ہم دیکھ چکے کہ ج ا زاویہ مسا ج مسا کی تصفیہ کرتا ہے۔
 گ گ اور گ گ کے قطب جنکو ہم مس اور مس سے تعبیر کریں گے قاطع محور کے خط پر واقع ہونگے (دفعہ ۹۵)۔
 اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ مس اور اس کا قطبی گ گ علی الترتیب ماسکہ اور مرتب ہیں، اسی طرح مس اور گ گ بھی ماسکہ اور مرتب ہیں فرض کرو کہ گ گ اور گ گ، ا ا کو لا اور لا پر قطع کرتے ہیں۔

(106)

قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے
 (ا ا، مس لا) = - ا

ج مس x ج لا = ج ا = ج گ

ج گ میں ایک قائمہ زاویہ ہے۔
 اب گ کا قطبی مس میں سے گذرنا چاہئے کیونکہ مس کا قطبی گ میں سے گذرنا ہے۔ مزید بریں گ کا قطبی مسا میں سے گذرنا ہے کیونکہ گ مسا پر منحنی کا مماس ہے۔
 مس مسا، گ کا قطبی ہے یعنی مس گ اور مس مسا مزدوج خطوط ہیں۔

دائرہ کے اُن وتروں کا ظل ہوتا ہے جو خط منعدم پر کے ایک نقطہ پر ملتے ہیں، اور ر کا قطبی جس کا ظل وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ہے نقطہ سہ میں سے گذرتا ہے جو خط منعدم کے ساتھ دائرہ کا نقطہ تماس ہے۔ اس طرح قطع مکانی کے متوازی وتروں کے نظام کے وسطی نقطوں کا طریق مسایا میں سے گذرتا ہے یعنی یہ خط محور کے متوازی ہے پس وہ تمام خطوط جو قطع مکانی کے مستوی میں ہوں اور اس کے محور کے متوازی ہوں ان میں سے ہر ایک متوازی وتروں کے ایک نظام کی تنصیف کرے گا۔ یہ خطوط قطع مکانی کے قطر کہلاتے ہیں۔ یہ اس مفہوم میں قطر نہیں ہیں جس میں مرکز دار مخروطیوں کے قطر ہوتے ہیں کیونکہ وہ طول میں محدود نہیں ہوتے اور نہ کسی معین نقطہ پر تنصیف ہوتے ہیں۔

(107)

۱۰۳۔ قطروں کے معین۔

تعریف۔ کسی مخروطی کے متوازی وتر جو کسی مخصوص قطر سے تنصیف ہوں اس قطر کے دوسرے معین کہلاتے ہیں اور نصف وتر کو اس قطر کا معین کہتے ہیں۔

کسی قطر کے معین جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں اس نقطہ یا نقطوں پر کے محاسنوں کے متوازی ہوتے ہیں جن پر قطر نخی سے ملتا ہے۔ کسی مخروطی کے محور کے معین اس محور پر عمود ہوتے ہیں۔ کسی قطع مکانی کے محور کے معین کسی قطع ناقص کے محور اعظم کے معین اور کسی قطع زائید کے قاطع محور کے معین اکثر صرف "معین" کہلاتے ہیں اور اس کی تخصیص نہیں کی جاتی کہ وہ کہاں کے معین ہیں مثلاً ایک قطع مکانی قاطع ناقص یا قطع زائید پر کے کسی نقطہ کے معین سے مراد وہ عمود لے لینا چاہئے جو محور پر محور اعظم پر یا قاطع محور پر جیسی کہ صورت ہو کھینچا گیا ہو۔

نوٹ۔ جب ہم مخروطی کا محور کہتے ہیں تو قطع مکانی کی صورت میں کوئی ابہام پیدا نہیں ہو سکتا لیکن قطع ناقص اور زائد کی صورت میں جنہیں تشاکل کے دو محور ہوتے ہیں ابہام ہو گا اگر ہم قبل از قبل یہ نہ بتا دیں کہ کونسا محور مراد ہے۔ پس ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ کسی مخروطی کے محور سے وہ محور مراد ہو گا جس پر اس کے واقع ہوتے ہیں۔

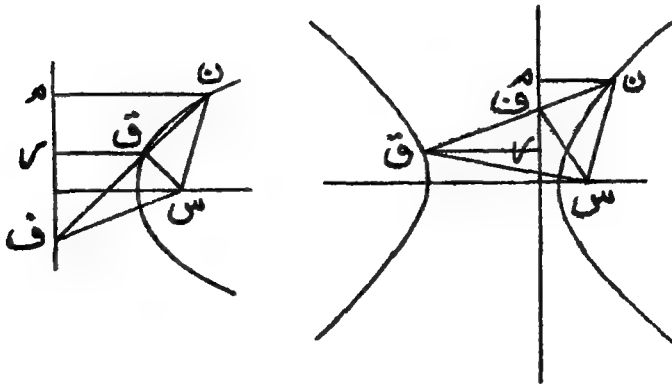
۱۰۔ اس باب کے مضامین مخروطی تراشوں کو صحیح طور پر سمجھنے کے لئے بڑا اہم ہیں۔ طالب علم کے ذہن میں اب تک منحنیوں کی شکل کا ایک بہت ہی اچھا عام تصور پیدا ہو چکا ہو گا گویا کہ وہ انہیں دیکھ رہا ہے یہ سمجھتے ہوئے کہ وہ ایک دائرہ کو ایک مستوی سے دوسرے مستوی پر منتقل کرنے سے حاصل ہوئے ہیں۔ ہم آئندہ باب میں وہ خواص بیان کریں گے جو سب مخروطیوں میں مشترک ہیں اور اس کے بعد والے ابواب میں قطع مکانی، ناقص اور زائد پر الگ الگ بحث کریں گے اور یہ دکھائیں گے کہ ہر ایک منحنی کے امتیازی خواص کیا ہیں۔

دسواں باب

خواص جو سب مخروطیوں میں مشترک ہیں

(108)

۱-۵۔ مسئلہ۔ اگر وہ خط (محدودہ بضرورت) جو ایک مخروطی کے نقطوں ن اور ق کو ملاتا ہے ایک مرتب سے ف پر ملے اور نظیری ماسکہ سے ہو تو خط اس ف، س، ن اور س ق کے درمیانی زاویوں میں سے ایک زاویہ کی تضعیف کریگا۔



ن م اور ق س مرتب پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ مخروط المکرز
ز ہے تو

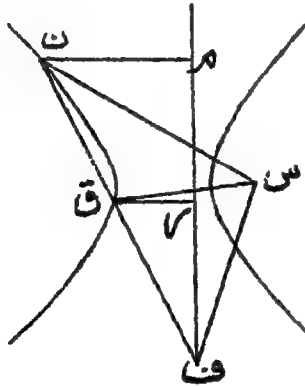
س ن : ن م = ز = س ق : ق س

س ن : س ق = ق س : ق م

= فن : ف ق (متشابه

مثلثوں ف ق س اور ف ن م سے)

۱۰۹ اشکال (۱) اور (۳) میں س ف، ن س ق کے خارجی
زاویہ کی تضعیف کرتا ہے اور شکل (۲) میں خود زاویہ ن س ق کی
تضعیف کرتا ہے۔

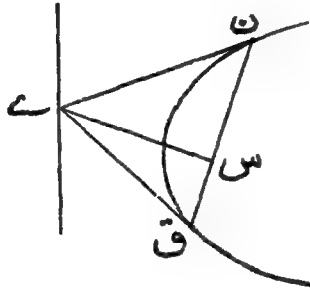


پس ہم دیکھتے ہیں کہ س ف، ن س ق کے خارجی زاویہ کی
تضعیف کرتا ہے اگر ن اور ق معنی کی ایک ہی شاخ پر ہوں اور خود
زاویہ ن س ق کی تضعیف کرتا ہے اگر ن اور ق مختلف شاخوں
پر ہوں۔

۱۰۶۔ اگر ایک مخروطی کے نقطہ ن پر کا حاس ایک مرتب سے

سے پر ملے اور نظیری ماسکہ میں ہو تو زاویہ سے میں ن
ایک قائمہ زاویہ ہوگا۔

حسب ذیل امور سے یہ مسئلہ آسانی کے ساتھ اخذ ہوتا ہے۔
ماسکہ اور مرتب مخروطی کے لئے "قطب اور قطبی" ہیں اس لئے
کسی ماسکی وترن میں ق کے سروں پر کے ماس مرتب پر ایک نقطہ
سے میں ملینگے اور س ن ق کا قطب ہوگا



پس میں سے اور میں ن مزدوج خطوط ہیں کیونکہ میں ن
کا قطب میں سے پرواقع ہے۔

(110) لیکن ماسکہ میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں کے زوج
علی القوائم ہوتے ہیں۔ اس لئے میں سے میں ن ایک قائمہ زاویہ ہے۔
لیکن چونکہ ہم آئندہ دفعہ میں یہ ثابت کریں گے کہ ہر مستوی منحنی جو
ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھے کسی نہ کسی دائرہ کا ظل ہوتا ہے اسلئے
ہم اس مسئلہ کا دوسرا ثبوت دینگے جو صرف اس خاصیت پر منحصر ہوگا۔
نقطہ ن پر کے ماس کو وترن ن کے خط کی انتہائی صورت
سمجھو جبکہ ن ن کے بہت ہی قریب ہو۔

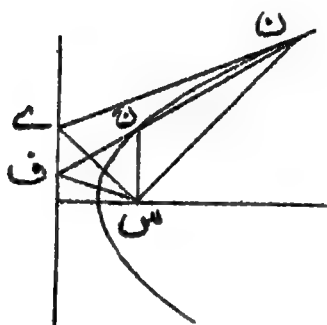
اب اگر ن ن مرتب سے ف پر ملے تو میں ف ن میں ن

کے خارجہ زاویہ کی تنصیف کرتا ہے (دفعہ ۱۰۵) کیونکہ ان اور بن ایک ہی شاخ پر ہیں۔

اور اس لئے نہ جتناں کے قریب آئیگا یہ خارجہ زاویہ
دو قائمہ زاویوں سے قریب تر ہوتا جائیگا۔

پس زاویہ \angle م س ن = \angle ف م س کی اتہا جیکہ ن ک ن پر پہنچے
= ایک قائمہ زاویہ

یہ مشاہدہ طلب



ہے کہ اس دوسرے
ثبوت سے یہ نتیجہ
بھی برآمد ہوتا ہے
کہ ایک ماسکی ووتر
کے سمروں پر کے

ماس مرتب ہو
متقاطع ہوتے ہیں

کیونکہ دترن سے قی

تو یہاں ایک سرے پر کا حماس، اس سے کو وتر کے علی القوا لم کھینچنے سے معلوم کیا جاتا ہے تاکہ وہ مرتب سے سے پر ملے تب سے ق اور سے ق حماس ہوتے ہیں۔

۱۰۷۔ پہلے باب میں ہم نے مخروطی تراشوں کی تعریف کی تھی کہ وہ ایک دائرہ کے ظل کے منحنی ہیں اور یہ ثابت کیا تھا کہ وہ یا سکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتے ہیں۔ اب ہم اسکا عکس مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ۔ ہر ستوی مخفی جو ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھے کسی دائرہ کا غل ہوتا ہے۔

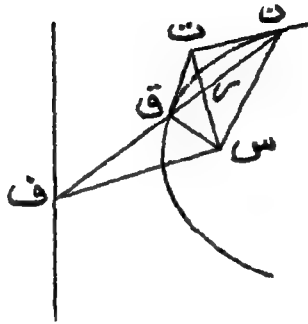
ہم دفعہ ۱۰۶ کے دوسرے حصہ میں ثابت کر چکے ہیں کہ وہ بھی جو

ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ ماسکہ میں سے گزرنیوالے کسی وتر کے بیروں پر کے ماس مرتب پر ایک ایسے خط کے ساتھ متقاطع ہوتے ہیں جو ماس میں سے گزرتا ہے اور وتر پر عمود ہے۔
 اب اس طرح تظلیل کرو کہ مرتب خط منعدم ہو اور ماس پر کا قائم درجہ ایک دوسرے قائم درجہ میں مطلق ہو جائے (صفحہ ۸۷)۔
 تب ظل کے منحنی میں یہ خاصیت ہوگی کہ ماس کے ظل میں سے گزرنیوالے ہر وتر کے بیروں پر کے ماس ایک خط پر جو ماس میں سے گزرتا ہے اور وتر پر عمود ہے لائننا ہی پر ملینگے۔
 اس لئے منحنی کے ہر نقطہ پر کا ماس اس نصف قطر کے علیٰ تقوایم ہوگا جو اس نقطہ کو س سے ملاتا ہے اور اس لئے یہ منحنی ایک دائرہ ہے جس کا مرکز س ہے۔
 ۱۰۸۔ جو کچھ ہم نے پہلے باب میں ثابت کیا ہے اس سے لازماً نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ماسکہ اور مرتب کی خاصیت رکھنے والے منحنی کا خروج المرکز اکائی ہو تو وہ دائرہ جس میں اسے مطلق کیا گیا ہے خط منعدم کو دائرہ کے مستوی میں مس کرتا ہے، اگر خروج المرکز اکائی سے کم ہو تو دائرہ خط منعدم سے نہیں ملتا اور اگر خروج المرکز اکائی سے بڑا ہو تو دائرہ خط منعدم سے منقطع ہوتا ہے۔

۱۰۹۔ ماسوں کا زوج۔

مسئلہ۔ اگر ایک نقطہ ت سے مخروطی کے ماس ت ن ت ق کھینچے جائیں اور ماس ایک ماسکہ ہو تو س ن اور س ق س ت کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں اور اگر ن ق نظیری مرتب سے ف پر ملے تو

زاویہ ت س ف قائم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ت س ، ن ق سے س پر ملتا ہے۔
چونکہ ن ق ، ت کا قطبی ہے اور وہ ف میں سے گزرتا ہے
اس لئے ف کا قطبی ت میں سے گزرنا چاہئے۔
لیکن چونکہ ف مرتب پر ہے ف کا قطبی س میں سے
گزرنا چاہئے۔

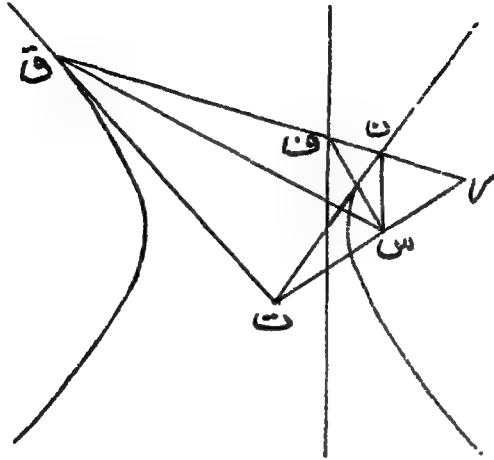
(112)

اس لئے س ت ، ف کا قطبی ہے۔
اس لئے س ف اور س ت مزدوج خطوط ہیں اور چونکہ
وہ ماسکہ میں سے گزرتے ہیں اس لئے انہیں علی القوائم ہونا چاہئے۔

نیر (ن ق ، ف س) = -۱

س (س ن ق ، ف س) = -۱

اس طرح س س اور س ف ، س ن اور س ق
کے درمیانی زاویوں کے نصف ہیں (دفعہ ۷۲)۔



نوٹ - یہ ظاہر ہے کہ ت سے کھینچے ہوئے ماسوں کے
نقاط تماس منحنی کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو مس ت، زاویہ
ن مس ق کی تنصیف کریگا لیکن اگر وہ مختلف شاخوں پر واقع ہوں
تو مس ت، ن مس ق کے خارجہ زاویہ کی تنصیف کریگا۔
شکلوں میں وہ صورت پیش نہیں کی گئی ہے جس میں ت ن
اور ت ق دونوں اس شاخ کو مس کرتے ہوں جو مس سے
دور ہے۔ طالب علم آسانی کے ساتھ اس صورت کو خود ایک شکل
بنا کر ظاہر کر سکتا ہے۔

۱۱۰۔ ایک بیرونی نقطہ سے مخروطی کے دو ماس کھینچنے کا ایک
سادہ عمل مسئلہ بالا سے ملتا ہے۔

(118) مس ت کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ مخروطی سے گ اور گ پر
ملتا ہے۔ گذشتہ دفعہ کی شکل سے استفادہ کیا جاسکتا ہے۔ گ گ نہیں
ایک نقطہ م ایسا لو کہ (ت گ، گ گ) = ۱ (دفعہ ۱۰، نتیجہ صریح ۲)

س ف، س ت کے علی القوائم کھینچو اور فرض کرو کہ وہ
مرتب سے ف پر ملتا ہے۔ خط ف س کھینچو اور فرض کرو کہ وہ
مخروطی کون اور ق پر قطع کرتا ہے۔
تب ت ن اور ت ق ماس ہونگے۔

کیونکہ س ت اور س ف علی القوائم ہیں اور ایک ماسک
میں سے گذرتے ہیں، اس لئے وہ مزدوج خط ہوں گے۔
س ت کا قطب، س ف پر واقع ہے۔

لیکن س ت کا قطب، مرتب پر ہے۔
ف، س ت کا قطب ہے یعنی ف کا قطبی ت
میں سے گذرتا ہے۔

ت کا قطبی ف میں سے گذرتا ہے۔
لیکن ت کا قطبی س میں سے گذرتا ہے کیونکہ (ت س) کا ک =۔
اس طرح خط ف س، ت کا قطبی ہے یعنی ن ق، ت سے کھینچے ہوئے
ماسوں کا وتر ماس ہے۔

۱۱۱۔ عماد۔

تعریف۔ وہ خط جو ایک ماس کے نقطہ تماس میں سے
گذرے اور اس پر علی القوائم ہو اس نقطہ پر کا عماد کہلاتا ہے۔

مسئلہ۔ اگر کسی مخروطی کے نقطہ ن پر کا عماد محور

سے گ پر ملے اور س، مخروطی کا ایک ماسک ہو تو

س گ = ز x س ن جہاں ز خروج المرکز ہے۔

فرض کرو کہ ن پر کا ماس اس مرتب سے جو س کے
متناظر ہے سے پر ملتا ہے۔

تقریب - وہ ماسکی وتر جو اس محور پر عمود ہو جس پر ماسک واقع ہے مخروطی کا وتر خاص کہلاتا ہے۔
اس طرح وتر خاص وہ دیہر امتین ہے جو ماسک میں سے گذرتا ہے اور محور پر عمود ہے۔

مسئلہ - کسی مخروطی کا نیم وتر خاص اس کے کسی ماسکی وتر کے مقطوعوں کے درمیان اوسط موسیقی ہوتا ہے۔
رض کرو کہ اس خ وتر خاص ہے اور ن س ق کوئی بھی وتر ہے۔

ن م اور ق را، مرتب پر عمود کھینچو اور ن ل اور ق ک، محور پر عمود کھینچو۔

اب س ن : ن م = ز = س خ : س لا
= س ق : ق را

اور تشابہ مثلثوں سے

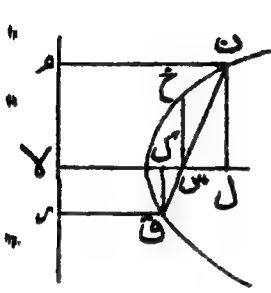
س ن : س ق = س ل : گ س
= لال - لا س : لا س - لا ک (مثل ۱)
= م ن - لا س : لا س - س ر ق
= ن (م ن - لا س) : ن (لا س - س ر ق)
= س ن - س خ : س خ - س ق
= س ن، س خ، س ق سلسلہ موسیقیہ میں ہیں اور

$\frac{1}{س ن} + \frac{1}{س ق} = \frac{2}{س خ}$
اگر ن اور ق مخالف شاخوں پر ہوں تو اس مسئلہ میں کچھ ترمیم کرنی ہوگی چنانچہ اس صورت میں

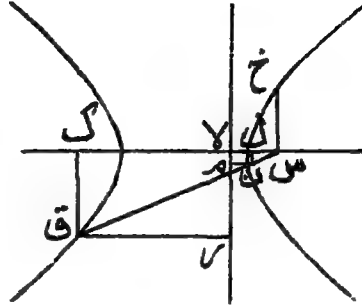
س ن : س ق = ل س : گ س = لا س - لان : گ لا + لا س (مثل ۲)

$$ز (لا س - من) : ز (قا + لا س) =$$

$$= س خ - س ن : س ق + س خ$$



شکل (۱)



شکل (۲)

$$\therefore س ن (س ق + س خ) = س ق (س خ - س ن)$$

$$\therefore س ق \times س خ - س ن \times س خ = ۲ س ن \times س ق$$

$$\therefore \frac{س ن}{س ق} = \frac{۱}{س خ} - \frac{۱}{س ن}$$

پس اس صورت میں س ن، س خ اور س ق
سلسلہ موسیقیہ میں ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ وہ مستطیل جو کسی ماسکی وتر کے مقطوعوں سے
بنتا ہے اس وتر کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔
کیونکہ

$$\frac{س ن}{س ق} = \frac{۱}{س خ} \pm \frac{۱}{س ن}$$

بموجب اس کے کہ ن اور ق ایک ہی شاخ پر واقع ہوں
یا مخالف شاخوں پر (جہاں ن اس شاخ پر ہے جو س کے قریب ہے)

اور اس لئے دونوں صورتوں میں

$$\frac{ن ق}{س ن \times س ق} = \frac{۲}{س خ}$$

$$س ن \times س ق = س ق \times \frac{س خ}{۲}$$

یعنی $س ن \times س ق = س ق \times (کیونکہ \frac{س خ}{۲} مستقل ہے)$ ۔

اگر $س ن$ اور $س ق$ مخالف سمتوں میں ہوں تو $ن$ اور $ق$ منہی کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں گے اگر وہ ایک ہی سمت میں ہوں تو $ن$ اور $ق$ مخالف شاخوں پر واقع ہوں گے۔

۱۱۳۔ مسئلہ۔ کسی مخروطی کی تطیل ایک دائرہ میں سطح کیجا سکتی ہے کہ مخروطی کے مستوی کا کوئی نقطہ دائرہ کے مرکز میں منسلل ہو۔

کیونکہ فرض کرو کہ مخروطی کے مستوی میں کوئی نقطہ $ن$ ہے۔

$ن$ کے قطبی کو خط منعدم کے طور پر لو اور اس طرح تطیل کرو کہ $ن$ میں سے گزرنے والے مزدوج خطوں کے زوجوں سے منہ والی درہچ پینل ایک قائم درہچ میں منسلل ہو جائے (دفعہ ۸) تب ٹھیک دفعہ ۹۳ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ظل کا منہی ایک دائرہ ہے۔

نوٹ۔ ظل کے حقیقی ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ $ن$

سے مخروطی کے ماس حقیقی نہ ہوں (نوٹ دفعہ ۸)۔ یعنی $ن$ مخروطی کے اندر واقع ہونا چاہئے۔

\therefore ا ب \times ا ب \times ج \times ا ج \times ا ج \times ب ج \times ب ج \times ج ج
 $=$ ا ج \times ا ج \times ج ج \times ج ج \times ب ج \times ب ج \times ا ب \times ا ب
 \therefore وہ مثلث جو خطوں ا ب، ب ج، ج ا سے بنتا ہے مثلث
 ا ب ج کے ساتھ منظرہ میں ہے (دفعہ ۶۸)۔

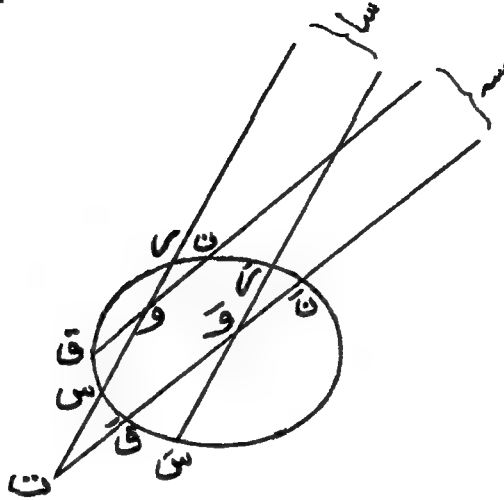
\therefore وہ مثلث جو خطوں ا ب، ب ج، ج ا سے بنتا ہے
 مثلث ا ب ج کے ساتھ منظرہ میں ہے۔
 \therefore دفعہ ۶۸ کی رو سے

(117)

ا ب \times ا ب \times ج ج \times ا ج \times ج ج \times ب ج \times ب ج
 $=$ ا ج \times ا ج \times ب ج \times ب ج \times ج ج \times ج ج
 ۱۱۵۔ نیوٹن کا مسئلہ۔

اگر ایک مخروطی کے مستوی میں و ایک متغیر نقطہ ہو
 اور ن ق اور راس و میں سے گزرنے والے وتر ہوں
 جو ثابت سمتوں میں کھینچے گئے ہوں تو
 $\frac{ون \times وق}{وراس \times ورس}$ مستقل ہوگا۔

فرض کرو کہ و کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ و میں سے وتر
 ن ق اور راس و دتروں ن ق اور راس کے متوازی کھینچو
 فرض کرو کہ ق ن اور ق ن لاتنا ہی پر نقطہ سے پر
 ملتے ہیں اور س راس و اور س راس نقطہ مسا پر۔



فرض کرو کہ ن ق اور ر س ت پر ملتے ہیں۔
اب مثلث س و ت پر کارنو کا مسئلہ استعمال کرو تو

$$\frac{\text{سن} \times \text{سہ} \times \text{ق} \times \text{و} \times \text{ر} \times \text{س} \times \text{ت} \times \text{ن} \times \text{ق}}{\text{سن} \times \text{ن} \times \text{سہ} \times \text{ق} \times \text{ت} \times \text{ر} \times \text{س} \times \text{و} \times \text{ن} \times \text{ق}} = 1$$

لیکن $\frac{\text{سن}}{\text{سن}} = 1$ اور $\frac{\text{سہ} \times \text{ق}}{\text{سہ} \times \text{ق}} = 1$

$$\frac{\text{ت} \times \text{ن} \times \text{ق}}{\text{ت} \times \text{ر} \times \text{س}} = \frac{\text{و} \times \text{ن} \times \text{ق}}{\text{و} \times \text{ر} \times \text{س}}$$

پھر مثلث سات و پر کارنو کا مسئلہ استعمال کرو تو

$$\frac{\text{سار} \times \text{ساس} \times \text{ت} \times \text{ن} \times \text{ق} \times \text{و} \times \text{ر} \times \text{س}}{\text{سار} \times \text{ساس} \times \text{و} \times \text{ن} \times \text{ق} \times \text{ت} \times \text{ر} \times \text{س}} = 1$$

$$\frac{\text{ت ن} \times \text{ت ق}}{\text{ت ر} \times \text{ت س}} = \frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و ر} \times \text{و س}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و ر} \times \text{و س}} = \frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و ر} \times \text{و س}}$$

یعنی $\frac{\text{و ن} \times \text{و ق}}{\text{و ر} \times \text{و س}}$ مستقل ہے۔

اس مسئلہ کو نیوٹن کا مسئلہ کہتے ہیں۔
نوٹ۔ نیوٹن کے مسئلہ کو استعمال کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہئے کہ خطوط و ن، و ق، وغیرہ مقدار اور علامت دونوں رکھتے ہیں۔ اگر و ن اور و ق مخالف سمتوں میں ہوں تو ان کی علامتیں مختلف ہونگی اور اسی طرح و ر اور و س کے لئے بھی۔
۱۱۶۔ نیوٹن کا مسئلہ بہت اہم ہے جیسا کہ ہم ابواب آئندہ میں دیکھیں گے جہاں اس سے بہت استفادہ کیا جائیگا۔ ہم اس کے استعمال کی توضیح کے لئے چند مسئلے دیتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر ایک مخروطی کے دو وتر ن و ق اور ق ق

و پر متقاطع ہوں تو نسبت و ن × و ن : و ق × و ق
ان ماسکی و تروں کے طولوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے جو ن و ق اور ق ق کے متوازی ہیں۔

فرض کرو کہ ن و ق اور ق ق کے متوازی ماسکی و ترن س ن اور ق س ق ہیں۔
نیوٹن کے مسئلہ سے

$$\text{و ن} \times \text{و ن} : \text{و ق} \times \text{و ق}$$

= س ن x س ن : س ق x س ق
 = ن ن : ق ق (دفعہ ۱۱۲ نتیجہ صریح)
 خاص صورت میں جبکہ و مخروطی کا مرکز ہو حاصل ہوگا
 ون = ون اور وق = وق

نوٹ - ہم قبل ازیں یہ واضح کر چکے ہیں کہ نیوٹن کا مسئلہ استعمال کرتے وقت خط کے مقطوعوں کی علامتیں ملحوظ رکھنی چاہئیں -
 اگر ون x ون اور وق x وق مختلف علامت ہوں تو س ن x س ن اور س ق x س ق بھی مختلف علامت ہوں گے - یہ صرف قطع زائد کی صورت میں واقع ہوتا ہے جبکہ حار نقطوں ن، ن، ق، ق میں سے ایک نقطہ اس شاخ کی مقابل شاخ واقع ہو جس پر دوسرے تین نقطے واقع ہیں - ایسی صورت میں ماسکی دتروں ن، ن، ق، ق میں سے ایک مخالف شاخوں کے دو نقطوں کو ملائیکا اور دوسرا، ایک ہی شاخ کے دو نقطوں کو ملائیکا -
 اگر ہم یہ قرار داد اختیار کریں کہ ماسکی وتر کے طول کو منفی علامت لگائی جائیگی اگر وہ مخالف شاخوں کے دو نقطوں کو ملائے اور مثبت علامت لگائی جائیگی اگر وہ ایک ہی شاخ کے دو نقطوں کو ملائے تو رشتہ ون x ون : وق x وق = ن ن : ق ق عددی اور جبری دونوں طرح صحیح ہے -
 اسی طرح علامت کی مذکورہ بالا قرار داد کے ساتھ یہ بھی درست ہے کہ اگر ماسکی دتروں ن، ن، ق، ق کے متوازی نیم قطر ج ن اور ج ق ہوں تو

ن ن : ق ق = ج ن : ج ق
 اس رشتہ سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ماسکی وتر ایک ہی شاخ پر کے

دو نقطوں کو ملائے اور دوسرا ماسکی وتر مخالف شاخوں پر کے دو نقطوں کو ملائے تو ان دو ماسکی و تروں کے متوازی دو قطروں میں سے صرف ایک قطر منحنی سے حقیقی نقطوں پر ملیگا کیونکہ اب نسبت جن : ج ق اتنی قیمت بنتی ہے۔

۱۱۷۔ مسئلہ۔ اگر ون اور وق، ایک مخروطی کے دو تماس ہوں تو ون : وق اُس نسبت کے مساوی ہے جو ون اور وق کے متوازی ماسکی و تروں کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ماسکی وتر ن س ن اور ق س ق ہیں۔ اب ون کے متعلق یہ سمجھنے سے کہ وہ منحنی سے دو منطبق نقطوں ن پر ملتا ہے (اور اسی طرح وق کے متعلق سمجھنے سے) نیوٹن کے مسئلہ لی رو سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ون} \times \text{ون} = \text{وق} \times \text{وق}$$

$$= \text{س ن} \times \text{س ن} : \text{س ق} \times \text{س ق}$$

۱۱۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ ایک مخروطی کو چار نقطوں پر قطع کرے تو وہ وتر جو ان کے نقاط تقاطع کو دو دو کر کے ملانے سے حاصل ہوں محور کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔

۱۱۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک دائرہ ایک مخروطی کو چار نقطوں پر قطع کرے تو وہ وتر جو ان کے نقاط تقاطع کو دو دو کر کے ملانے سے حاصل ہوں محور کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی اور دائرہ چار نقطوں 'ن'، 'ق'، 'ن'، 'ق' پر متقاطع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ 'ن' اور 'ق' 'ق' و 'ن' پر متقاطع ہوتے ہیں۔
 'ن' اور 'ق' کے متوازی ماسکی وتر 'ن' 'ق' میں 'ق'۔

(126) کھینچو تو نیوٹن کے مسئلہ سے

$$\begin{aligned} & \text{ون} \times \text{ون} : \text{وق} \times \text{وق} \\ & = \text{سن} \times \text{سن} : \text{سق} \times \text{سق} \\ & = \text{نن} : \text{قق} \end{aligned}$$

لیکن دائرہ کے لئے

$$\text{ون} \times \text{ون} = \text{وق} \times \text{وق}$$

نن = قق اور سن × سن = سق × سق
 اس طرح یہ متوازی ماسکی وتر ایک ہی علامت رکھتے ہیں ان کے طول مساوی ہیں اور وہ مستطیل جو ان کے مقطوعوں سے حاصل ہوتے ہیں مساوی ہیں۔

اس لئے یہ وتر متشاکلاً واقع ہونے چاہئیں اور اس لئے محور کے ساتھ مساوی زاوے بنانے چاہئیں۔ پس 'ن' اور 'ق' جو ان ماسکی وتروں کے متوازی ہیں محور کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک دائرہ ایک مخروطی کو ایک نقطہ پر

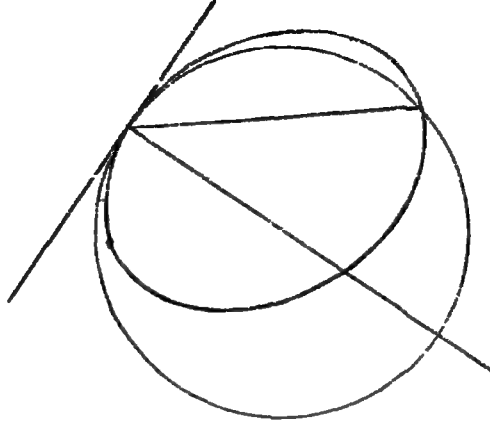
مس کرے اور دوسرے دو نقطوں پر قطع کرے تو نقطہ تماس پر کا

ماس اور نقاط تعاطی کو ملانے والا وتر محور کے ساتھ مساوی زاوے بنائینگے۔

دائرہ انخاء،

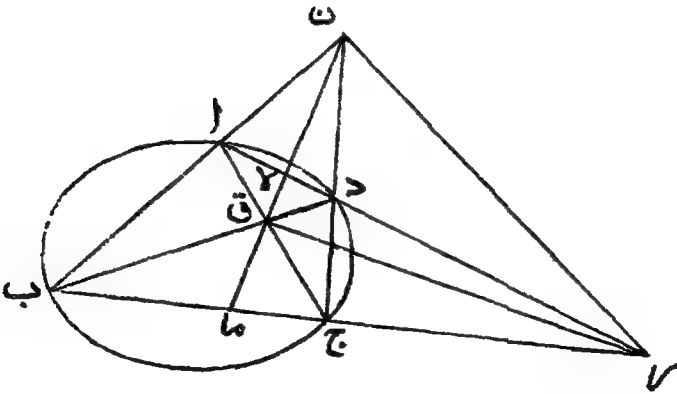
۱۱۹۔ ان دائروں کی تعداد جو ایک مخروطی کو ایک دئے ہوئے نقطہ N پر مس کریں لا متناہی ہے اور ایسے دائروں کے مرکز اس خط پر ہوتے ہیں جو دئے ہوئے نقطہ پر مخروطی کا عماد ہے۔ دائرے بالعموم مخروطی کو دوسرے دو نقطوں قطع کرنے لگیں اس خاص صورت میں جبکہ ان دو دوسرے نقطوں میں سے ایک، نقطہ تماس N پر منطبق ہو دائرہ کو نقطہ N پر کا دائرہ انخاء کہتے ہیں۔ اس دائرہ کو اس دائرہ کی انتہائی صورت سمجھا جاسکتا ہے جو مخروطی کے نقطہ N میں سے اور اس سے متصل دو نقطوں میں سے گزرے، گویا اس صورت میں مخروطی اور دائرہ دو متصل تماس مشترک رکھتے ہیں۔ ایسی صورت میں ان دونوں کے انخاء کی شرح اس نقطہ پر ایک ہی ہوتی ہے۔ انخاء کا مضمون خاص طور پر تفرقی احصاء سے تعلق رکھتا ہے لیکن یہاں مخروطی کے دوائر انخاء کی اہم خاصیتیں بیان کرنا مناسب معلوم ہوتا ہے۔ چنانچہ قطع مکانی ناقص اور زائد کے ابواب کے ختم پر ہم ایک مسئلہ بیان کریں گے جو ان منحنیوں کے دوائر انخاء سے متعلق ہوگا۔ دفعہ ۱۱۸ کی رو سے یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک مخروطی کے نقطہ N پر کا دائرہ انخاء مخروطی کو مرکز نقطہ Q پر قطع کرے تو N Q اور نقطہ N پر کا تماس محور کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں گے، کیونکہ نقطہ N پر کا تماس اور وتر N Q ، دائرہ اور مخروطی کے مشترک وتر ہیں۔

حسب ذیل شکل ایک مخروطی کے ایک نقطہ پر کے دائرہ انخاء کی تمثیل ہے۔



خود قطبی مثلث -

۱۱۹۔ مسئلہ۔ اگر ایک محروطی ایک چار زاوی کے چار نقطوں میں سے گزرے تو وتری یا موسیقی مثلث، محروطی کے لحاظ سے خود قطبی ہوتا ہے یعنی ہر اس متقابلہ ضلع کا قطب ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ چار زاوی (ب ج د ہے اور ن ق سر وتری
یا سو سیقی مثلث۔

فرض کرو کہ ن ق، د اور ب ج کو لا اور ما پر طبع کرتا ہے۔

اب (د، لا، ص) = ۱۔

سر کا قطبی لا میں سے گزرتا ہے (دفعہ ۹۲ (۵))

اور (ب ج، ما، ص) = ۱۔

سر کا قطبی ما میں سے گزرتا ہے

ن ق، سر کا قطبی ہے۔

اسی طرح ق، سر، ن کا قطبی ہے اور ن، سر، ق کا۔
پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ وتری نقطہ
جب دو دوار کے لئے جاتے ہیں تو وہ مخروطی کے فردوج نقطے ہوتے ہیں۔

مثلث ن ق، سر کو مخروطی کے لحاظ سے خود فردوج بھی کہتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک مخروطی، ایک ماسکہ اور اس کا نظیری مرتب دئے جائیں تو
بتاؤ کہ کسی نقطہ پر ماس کس طرح کھینچا جاسکتا ہے۔

۲۔ اگر مخروطی پر کے دو نقطے اور ایک مرتب دئے گئے ہوں تو بتاؤ کہ
متناظر ماسکہ کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳۔ ایک مخروطی کے دو وترن و ن اور ق و ق نقطہ و پ
مقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق اور ن ق، و کے قطبی برستے ہیں۔

[مخروطی کو ایک دائرہ میں اور و کو دائرہ کے مرکز میں منظر کرو]

۴۔ اگر وتر خاص خ میں خ کے سر پر کا ماس قریب تر اس
پیر کے ماس سے نقطہ تا پہلے تو ت = ۱ = (س)۔

۵۔ اگر ایک مخروطی کے کسی نقطہ n پر کاماس ایک مرتب سے f پر ملے اور متناظر ماسکہ میں سے گذر نیوالے وتر خاص سے d پر ملے تو
 $سب : د : س = ف : ح = خروج المکرز$ ۔

۶۔ اگر ایک مخروطی کے نقطہ n پر کا عماد محور سے g پر ملے اور g ماسکی نصف قطر $س$ پر عمود ہو تو n $خ = نصف وتر$ ۔
 ۷۔ اگر ایک مخروطی پر f کوئی نقطہ ہو اور n $س$ n ایک ماسکی وتر ہو اور اگر n $ق$ اور n $ق$ اس مرتب سے جو ماسکہ میں کے متناظر ہے $ف$ اور $ف$ پر ملیں تو $ف$ $س$ $ف$ ایک قائمہ زاویہ ہوگا۔

(121) ۸۔ اگر ایک مخروطی ایک مثلث $ا ب ج$ کے راسوں $ا ب ج$ کے مقابل کے اضلاع سے علی الترتیب $د$ $ع$ $ف$ پر ملے تو $ا د$ $ب ع$ $ج ف$ ہم نقطہ ہوں گے۔ [دفعہ ۱۱۴ استعمال کرو]
 ۹۔ نیوٹن کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ اگر ایک مکانی پر کے ایک نقطہ n کامین n $ل$ ہو اور مکانی کا راس $ا$ ہو تو n $ل$ $ا$ متغی نہ نقطہ n کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۱۰۔ دو ثابت نقطوں $د$ اور $ع$ میں سے مخروطیاں کھینچنے لگیں اور وہ ایسے ہیں کہ $د ع$ کے مجاذی ان میں سے ایک کے ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو اس ماسکہ کو $د ع$ کے قطب سے ملتا ہے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۱۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اسکے ایک مرتب سے اس قطر پر ملتا ہے جو اس نقطہ میں سے اور متناظر ماسکہ میں سے گذر نیوالے ماسکی وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مخروطی کے ایک ماسکہ اور قطبی مرتب کے اس نقطہ کو ملانے والا خط جس پر متوازی دتروں کے ایک نظام کی تنصیف کرنیوالا قطر اس مرتب سے ملتا ہے دتروں پر عمود ہوتا ہے۔ [دفعات ۱۹۵ اور ۱۰۶ استعمال کرو]

۱۳۔ ایک مخروطی پر دو نقطے ن اور ق ہیں اور وہ قطر جو علی الترتیب ن اور ق پر کے ماسوں کے متوازی دندروں کی تنصیف کرتے ہیں مرتب سے م اور ل پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ م ل کے محاذی متناظر ماسکے پر جو زاویہ بنتا ہے وہ اُس زاویہ کے مساوی ہے جو ن اور ق پر کے ماسوں کے درمیان ہے۔

۱۴۔ ایک متغیر مخروطی کا ایک ماسکے اور متناظر مرتب دئے گئے ہیں ثابت کرو کہ ایک دئے ہوئے نقطہ کا قطبی ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

۱۵۔ ایک متغیر مخروطی کا ایک ماسکے اور دو نقطے دئے گئے ہیں ثابت کرو کہ متناظر مرتب و ثابت نقطوں میں سے کسی ایک میں سے گذرنا جائے گا۔

۱۶۔ اگر دو مخروطیوں میں ایک ماسکے مشترک ہو تو ان دو مخروطیوں کا ایک مشترک وتر متناظر مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے گا۔

۱۷۔ اگر ایک مخروطی کے نقطہ ن پر کے ماس پر کوئی نقطہ ت ہو اور مخروطی کا ایک ماسکے م ہو اور اگر م ت پر عمود ت م اور م کے متناظر مرتب پر عمود ت ل ہو تو ثابت کرو کہ

م : ت ل = ز (آدم کا مسئلہ)

۱۸۔ ایک مخروطی کا ایک ماسکے اور اس ماسکے میں سے گذرے والا ایک وتر دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ متناظر وتر خاص کے سروں کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۱۹۔ اگر ایک مخروطی کے دو ماس ت ن اور ت ق ہوں تو ثابت کرو کہ ن ق کے متوازی ماس کا وہ حصہ جو ت ن اور ت ق کے درمیان منقطع ہوتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

۲۰۔ ایک مخروطی کا ایک قطر منحنی سے نقطہ ن پر ملتا ہے اور اُس وتر ق ر کی تنصیف کرتا ہے جو ق پر عماد ہے۔ ثابت کرو کہ ق میں سے گذرنے والا قطر ن میں سے گذرنے والے اُس وتر کی تنصیف کرتا ہے جو ن پر عماد ہے۔

۲۱۔ ایک مخروطی کا ایک وتر $ن ق$ ہے جو محور کو $گ$ پر قطع کرتا ہے۔ $ن ق$ کا قطب $ت$ ہے۔ وہ قطر جو $ن ق$ کی تصنیف کرتا ہے ایک مرتب سے $ے$ پر ملتا ہے اور $س$ متناظر ماسکہ ہے۔ ثابت کرو کہ $ت$ سے $ے$ کے متوازی ہے۔

۲۲۔ ایک مخروطی کے وتر $ا ا'$ ، $ب ب'$ ، $ج ج'$ ایک نقطہ $و$ پر ملتے ہیں اور مخروطی پر کوئی نقطہ $ن$ ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم $ب ج$ اور $ن ا$ ، $ج ا$ اور $ن ب$ ، $ا ب$ اور $ن ج$ کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو $و$ میں سے گذرتا ہے۔
[نقطہ $و$ اور $ا ب$ ، $ن ج$ کے نقطہ تقاطع کو ملائے والے خط کو لامتناہی پر اور مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کر دو]

۲۳۔ ایک مخروطی پر چار نقطے $ا$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ ہیں $ا ب$ اور $ج د$ ، $ع$ پر اور $ا ج$ اور $ب د$ ، $ف$ پر ملتے ہیں $ے$ اور $د$ پر $گ$ ماس $گ$ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقاط $ع$ ، $ف$ ، $گ$ ہم خط ہیں۔
[$ا د$ اور $ب ج$ کو متوازی خطوں میں اور مخروطی کو ایک دائرہ میں منظر کر دو]

۲۴۔ اگر ایک مخروطی ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اندر بنایا جائے تو نقاط تماس میں سے دو نقطوں کو ملائے والا خط اس مثلث کے ایک راس میں سے گذریگا جو ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں سے بنتا ہے۔

۲۵۔ بیاسکل (Pascal) کا یہ مسئلہ ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس بنایا جائے تو متقابلہ ضلعوں کے زوج تین ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جو ہم خط ہیں۔

[مخروطی کی نظیل ایک دائرہ میں اس طرح کرو کہ وہ خط جو متقابلہ ضلعوں کے زوجوں کے نقاط تقاطع کو ملائے لامتناہی پر منظر ہو]

۲۶۔ ایک مخروطی کے مستوی میں $ا$ ایک ثابت نقطہ ہے اور $ا$ کے قطبی پر $ن$ کوئی نقطہ ہے۔ $ن$ سے مخروطی کے ماس ایک دے ہو

خط کو قی اور سہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس 'ن ق اور اق' ن سہ ایک ثابت خط پر تقاطع ہوتے ہیں۔

[خروطی کو ایک دائرہ میں اس طرح منظم کرو کہ اسکا مرکز (ہو)]

- ۳۳۔ اگر چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج' دئے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ بالعموم چار مخروطی، 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے کھینچے جا سکتے ہیں جنکا ماسکہ میں ہو اور یہ کہ ان میں سے تین مخروطی ایسے قطع زائد ہونگے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک ہی شاخ پر واقع نہیں ہوں گے لیکن بقیہ مخروطی ایسا قطع ناقص، قطع زائد یا قطع مکافہ ہو سکتا ہے کہ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک ہی شاخ پر واقع ہونگے۔
- ۳۴۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی تطیل ایک قطع مکافی میں اس طرح کی جا سکتی ہے کہ دائرہ کے اندر کا کوئی دیا ہوا نقطہ ماسکہ میں منظر ہو۔
- ۳۵۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی تطیل ایک قطع ناقص میں اس طرح کی جا سکتی ہے کہ دائرہ کے اندر کے دو دئے ہوئے نقطے قطع ناقص کے مرکز اور ایک ماسکہ میں منظر ہوں۔
- ۳۶۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ کی تطیل ایک قطع زائد میں اس طرح کی جا سکتی ہے کہ دائرہ کے اندر کا ایک دیا ہوا نقطہ 'ن' اور اس کے باہر کا دوسرا دیا ہوا نقطہ 'ق' علی الترتیب قطع زائد کے ایک ماسکہ اور مرکز میں منظر ہوں۔

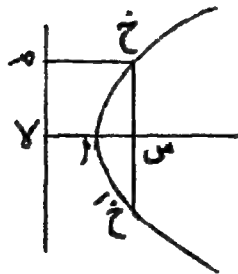
گیارہواں باب

قطع مکانی

(126)

۱۲۰۔ قطع مکانی کی شکل دفعات ۹۶ اور ۹۷ میں دکھائی جا چکی ہے۔ اس باب میں ہم اس منحنی کی مخصوص خاصیتیں بیان کریں گے۔ پورے باب میں λ اس کے لئے μ اس کے لئے ν اس کے لئے ρ مرتب اور محور کے نقطہ تقاطع کے لئے اور مسا لاتنا ہی پر محور کے اس نقطہ کے لئے استعمال ہوگا جس پر جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں قطع مکانی لاتنا ہی پر کے خط کو مس کرتا ہے۔

مسئلہ۔ وتر خاص = μ اس



آئندہ چکر یہ معلوم ہوگا کہ یہ مسئلہ ایک عام تر مسئلہ کی صرف ایک مخصوص صورت ہے۔

۱۲۲۔ مسئلہ ماضی سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع مکانی ایک مستوی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے کہ ایک خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے ایک عمود وار خط ل سے اس کا فاصلہ۔ خط ل محور ہے، ل اس پر کا ماس اور تغیر کا مستقل وتر خاص کا طول ہے۔
قطع مکانی کی تعین کے لئے ہمیں یہ جاننا چاہئے کہ نقطہ خط ل کی کس جانب واقع ہے۔ اگر وہ خط کے دونوں طرف واقع ہو سکتا ہے تو طریق دو قطعات مکانی ہیں اور ان میں ہر ایک دوسرے سے اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ اس کو راس پر کے ماس کے گرد دو قائمہ زاویوں میں سے لکھایا جائے۔

۱۲۳۔ ماس اور عماد۔

مسئلہ۔ اگر نخی کے نقطہ ن پر کا ماس محور سے نقطہ ت پر اور عماد محور سے نقطہ گ پر ملے اور ن کا معین ن ل ہو تو

$$(۱) \text{ ت ل} = \text{ل گ}$$

$$(۲) \text{ ل گ} = ۲ \text{ ل س}$$

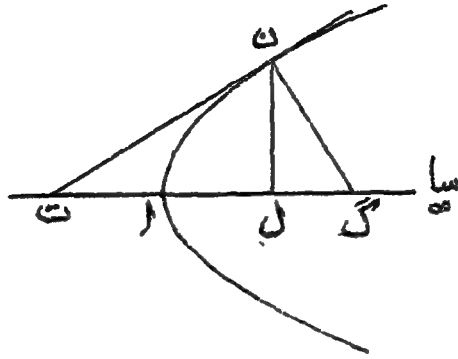
ان میں سے پہلی خاصیت دفعہ ۹ میں ثابت کی جا چکی ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ن ل، منحنی سے مکرر ن پر ملے تو ن اور ن پر کے ماس محور کے خط پر ملتے ہیں یعنی وہ ت پر متقاطع ہوتے ہیں اب قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے

(128)

$$(ت ل) (ل س) = -۱$$

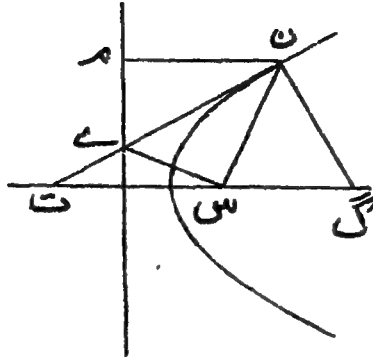
$$ت ل = -۱$$



نیز چونکہ ت ن گ قائمہ زاویہ ہے اس لئے
 $ن ل^2 = ت ل \times ل گ = ا ل^2 \times ل گ$
 لیکن ت ل^2 = ا ل^2 \times ا ل (دفعہ ۱۲۱)
 $ل گ = ا ل^2$

تعریف۔ ل گ کو نقطہ ن کا زیر عماد کہتے ہیں۔
 اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ قطع مکانی میں زیر عماد مستقل ہوتا ہے۔

۱۲۴۔ مسئلہ۔ قطع مکانی کے کسی نقطہ پر کا ماس
 محور اور اس نقطہ کے ماسکی فاصلہ کے ساتھ مساوی
 زاوے بناتا ہے۔



فرض کرو کہ نقطہ ن پر کا ماس مرتب سے عے پر اور محور سے
ت پر ملتا ہے۔ ن م، مرتب پر عمود کیچھو۔

اب چونکہ سن = ن م اور ن عے مثلثات
سن عے اور م ن عے میں مشترک ہے اور ان مثلثوں
میں م اور سن پر کے زاوے قائم ہیں اس لئے
سن عے = م ن عے

اور سن ن ت = ت ن م = ت م ت ن

نتیجہ صریح۔ اگر ن پر کا عماد محور سے گ پر ملے تو

سن گ = سن ن = سن ت

سن ت اور سن ن کا مساوی ہونا زاویوں سن ن ت
اور سن ت ن کے مساوی ہونے سے ماخوذ ہوتا ہے۔
نیز چونکہ ان زاویوں کے تکملے مساوی ہونے چاہئیں اسلئے

سن ن گ = ت م گ ن

ن م گ = سن ن

(129)

یہ یاد رہے کہ قطع مکانی میں $س$ گ اور $ن$ کا مساوی ہوتا اس واقعہ سے اخذ ہوتا ہے کہ کسی مخروطی کے لئے $س$ گ = $ز$ $س$ ن (دفعہ ۱۱۱)۔

۱۲۵۔ مسئلہ۔ قطع مکانی کے ماسکے سے اس کے کسی

نقطہ $ن$ کے مماس پر عمود نکالا جائے تو اس عمود کا پائین

ما، راس پر کے مماس پر واقع ہوتا ہے اور $س$ ما = $س$ ا

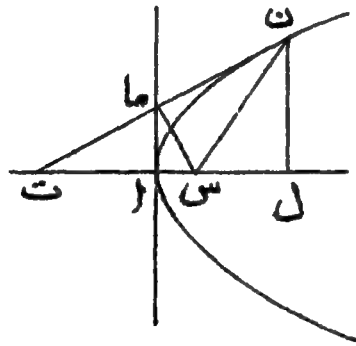
$س$ ن۔

اس مسئلہ کا پہلا جزو دفعہ ۹۰ میں ضمنی طور پر ثابت کیا جا چکا ہے

اسے ہم حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $ن$ پر کا مماس محور سے $ت$ پر ملتا ہے۔ چونکہ

$س$ ت = $س$ ن اس لئے $س$ ما ت $ن$ کی تضعیف کرے گا۔



لیکن اگر $ن$ ل کا معین ہو تو $ا = ل$

∴ اما $ل$ ن کے متوازی ہے یعنی $ا$ ما، راس پر مماس ہے۔

(130,

نیز چونکہ میں مادت ایک قائمہ زاویہ ہے اور ما (ا) مس ت
پر عمود ہے اس لئے میں ما' = میں (ا) مس ت = میں (ا) مس ن

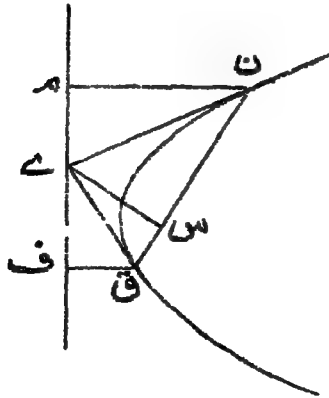
نتیجہ صریح (۱)۔ میں ن = میں ما' (ا)

نتیجہ صریح (۲)۔ اگر ایک متغیر خط پر ایک ثابت نقطہ سے عمود
نکلا جائے اور اس عمود سے پائیں کا طریق ایک نقطہ مستقیم ہو تو متغیر خط
ایک قطع مکانی کو مس کرے گا جس کا ثابت نقطہ ہو گا۔

تعلیل۔ جب کوئی خط ایک مستوی میں اس طور پر حرکت کرے کہ
وہ ہمیشہ کسی خاص منحنی کو مس کرتا رہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ منحنی خط کا لہاف ہے۔

ماسوں کا زوج

۱۲۶۔ مسئلہ۔ قطع مکانی کے کسی ماسکی وتر کے بیروں پر کے
ماس مرتب پر علی القواہم تقاطع ہوتے ہیں۔



یہ امر کہ وہ مرتب بر تقاطع ہوتے ہیں ہم پہلے سے جانتے ہیں کیونکہ
ماسکہ اور مرتب قطب اور قطبی ہیں۔

فرض کرو کہ \angle س ق ایک ماسکی وتر ہے اور فرض کرو کہ
اس کے سروں پر کے ماس مرتب بر نقطہ سے پر ملتے ہیں۔ مرتب پر
عمود \angle م اور ق ف بھیجیو۔

اب جیسا کہ ہم دفعہ ۱۲۴ میں دیکھ چکے ہیں

$$\angle \text{س ن} = \angle \text{م ن}$$

$$\angle \text{س س} = \angle \text{م م}$$

$$\text{اسی طرح } \angle \text{س ق} = \angle \text{م ق}$$

$$\text{اس لئے } \angle \text{ق م} = \frac{1}{2} \times \text{دو قائمہ زاوے}$$

$$= \text{ایک قائمہ زاویہ}$$

۱۲۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع مکانی کے دو ماس \angle ت ن

(131)

اور \angle ق ہوں تو مثلثات \angle س ن ت اور \angle س ق
متشابه ہوں گے۔

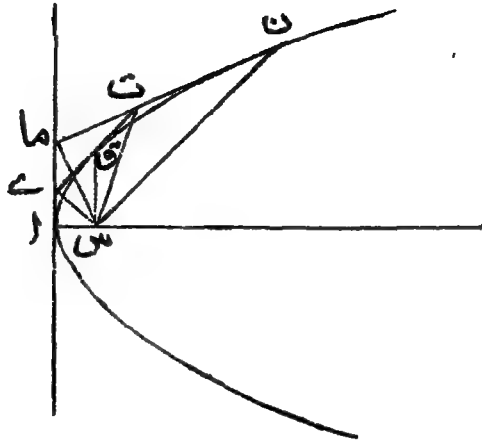
ہم جانتے ہیں کہ زاوے \angle س ت اور \angle س ق

ساوی ہیں (دفعہ ۱۰۹)۔

فرض کرو کہ \angle ن اور ق پر کے ماس ماس پر کے ماس سے ما
اور سے پر ملتے ہیں تو \angle س م ت اور \angle س م ق قائمہ زاوے
ہیں (دفعہ ۱۲۵)۔

$$\text{اب } \angle \text{س ن م} = \angle \text{س م ت} \quad (\text{دفعہ ۱۲۵})$$

$$= \angle \text{س ت م} \quad \text{کیونکہ } \angle \text{س م ت} \text{ و } \angle \text{س م ق}$$



پس $\angle س ن ت = \angle س ت ق$
 ∴ بقیہ زاویہ $س ت ن = \angle س ق ت$ اور مثلثات
 $س ن ت$ اور $س ت ق$ متشابه ہیں۔

نتیجہ صریح (۱)۔ $س ت^۱ = س ن \times س ق$

کیونکہ $س ن : س ت = س ت : س ق$

نتیجہ صریح (۲)۔ $ت ن^۱ : ت ق^۱ = س ن : س ق$

کیونکہ $ت ن : ت ق = س ن : س ق$

$= س ن \times س ت : س ت \times س ق$

اسوجہ سے کہ $س ت = س ق$

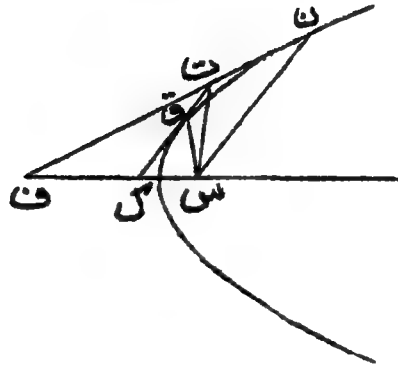
$= س ن : س ق$

۱۲۸۔ مسئلہ۔ ایک قطع مکانی کے دو مماسوں کے درمیان

زاویہ خارجہ اُس زاویہ کے نصف کے مساوی ہوتا ہے جو

ان کا وتر تماس ماسکھ پر بنا آ ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے ماس نقطہ ت پر ملتے ہیں اور
فرض کرو کہ وہ محور سے علی الترتیب ف اور گ پر ملتے ہیں۔



اب ح ف ت گ = ح س گ ق - ح س ف ن

= ح س ق گ - ح س ن ت

= ۲ قائمہ زاوے - ح س ق ت

- ح س ن ت

= ۲ قائمہ زاوے - ح س ت ن

- ح س ن ت

= ح ت س ن

= $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ ح ن س ق

۱۲۹۔ قطع مکانی جو ایک مثلث کے اضلاع کو مس کرے۔

جب ایک مثلث کے اضلاع ایک قطع مکانی کے ماس ہوں تو

ہم کہتے ہیں کہ مثلث قطع مکانی کو حائط کرتا ہے۔ لیکن یہ صاف طور پر بدترین
 رہے کہ مثلث قطع مکانی کو گھیر نہیں لیتا کیونکہ کوئی محدود مثلث کسی قطع مکانی
 کو جو وسعت میں لامتناہی ہوتا ہے گھیر نہیں سکتا۔ جب کوئی مثلث
 ایک قطع مکانی کو حائط کرتا ہے تو فی الحقیقت قطع مکانی مثلث کا خارجی
 قطع مکانی ہوتا ہے یعنی وہ مثلث کے ایک ضلع کو اور دیگر دو محدودہ
 ضلعوں کو مس کرتا ہے۔ صرف وہ مثلث جس کا ایک ضلع لامتناہی پر کا
 خط ہو قطع مکانی کو گھیر سکتے ہیں اور صحیح معنوں میں حائط مثلث کہے جاسکتے ہیں
 لیکن لفظ "حائط کرتا" کے معنوں کی توسیع کرنے میں سہولت ہے چنانچہ
 جب ہم یہ کہیں کہ ایک مثلث ایک مخروطی کو حائط کرتا ہے تو اس سے
 یہ مطلب ہوگا کہ مثلث کے ضلع مخروطی کو مس کرتے ہیں خواہ مثلث
 مخروطی کو پوری طرح گھیرے یا نہ گھیرے۔

۱۳۰۔ اس مثلث کا حائط دائرہ جو ایک قطع مکانی کے

تین ماسوں سے بنتا ہے ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

حائط کرنے کا وہ مطلب لینے سے جو دفعہ ۱۲۹ میں سمجھایا جا چکا
 ہے ہم اس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی بیان کر سکتے ہیں۔

اگر ایک مثلث ایک قطع مکانی کو حائط کرے تو اس کا
 حائط دائرہ ماسکہ میں سے گزرے گا۔

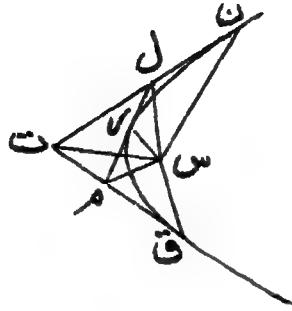
یہ اس واقعہ سے ظاہر ہے کہ ماسکہ سے مثلث کے تین ضلعوں
 عمودوں کے پائیں ہم خط ہوتے ہیں کیونکہ وہ اس (۱) پر کے ماسس پر
 واقع ہیں۔

۱۳۱۔ ماس، مثلث کے حائط دائرہ پر واقع ہے۔

یا ہم اس مسئلہ کو دوسری طرح ثابت کر سکتے ہیں:-

فرض کرو کہ 'ن'، 'ق'، 'م' پر کے ماس مثلث 'ل' م

بناتے ہیں (دیکھو شکل)۔



اب چونکہ Δ س ن ل Δ س ل ر کے مشابہ ہے
اس لئے Δ س ل ر = س ن ل
اور چونکہ Δ س ن ت Δ س ت ق کے مشابہ
ہے اس لئے Δ س ت ق = س ن ت۔
: Δ س ل م = س ت م
یعنی س ل ت م دائری ہے یا اس اُس دائرہ پر واقع ہے
جو ت ل م میں سے گزرتا ہے۔

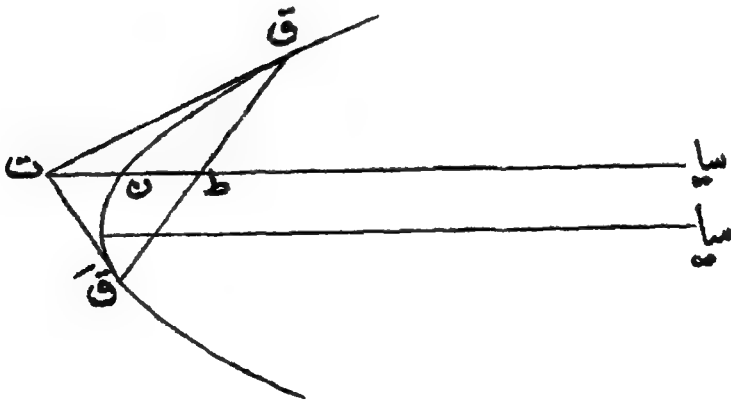
نتیجہ صریح۔ ایک ایسے مثلث کا مرکز عمودی جو ایک
قطع مکانی کو حاطط کرے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔
اگر ت ل م مثلث ہو تو وہ خط جو س کو مرکز عمودی
سے ملاتا ہے اس پر کے ماس سے تصفیہ ہوتا ہے جو س کا خط
پائین ہے (دفعہ ۸)۔

۱۳۱۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع مکانی کے نقاط اور ق
مرکز عمودی مرتب پر واقع ہوتا چاہئے۔

Δ س ت م اور Δ س ر ل = Δ س ل ن
 $= 180^\circ - \Delta$ س ل ت = Δ س م ت
 Δ ل ر ت م = Δ س ر م
 $=$ م ر م ق (متشابہ Δ س ر م س م ق سے)
 Δ ل ر م = Δ ت م م ق
 اسی طرح م ر م ر ل = Δ ت ل ل ن
 اس لئے ن ل ت = Δ ت م م ق = Δ ل ر م
 ۱۳۲ - قطر -

ہم دفعہ ۱۰۲ میں یہ سمجھا چکے ہیں کہ قطع مکانی کے قطروں سے کیا مراد ہے۔
 محور کے متوازی ہر خط ایک قطر ہے اور ہر قطر متوازی وتروں کے ایک نظام
 کی تنصیف کرتا ہے۔ یہ بھی یاد رکھنا چاہئے کہ متوازی وتروں میں سے ہر ایک
 کے سروں پر کے مماس اس قطر پر متقاطع ہوتے ہیں جو ان وتروں کی
 تنصیف کرتا ہے (دفعہ ۹۵)

(135)



مسئلہ - اگر ت ق اور ت ق ایک مکانی کے مماس

ہوں اور ت ط وہ قطر ہو جو ق ق کی ط پر تنصیف کرتا ہے
اور منحنی کو ن پر قطع کرتا ہے تو ت ن = ن ط -

چونکہ ن ط ، محور کے متوازی ہے اس لئے وہ مسا میں سے

گذرتا ہے -

اس لئے قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت کی رو سے

(ت ط ، ن سا) = ۱ -

ت ن = ن ط

یہ یاد رہے کہ ت ا = ا ل (دفعہ ۱۲۳) اس مسئلہ کی صرف

ایک مخصوص صورت ہے -

۱۳۳ - مسئلہ - قطع مکانی کے کسی ماسکی وتر کا طول اس

نقطہ سے ماسکہ کے فاصلہ کا چار گنا ہوتا ہے جس پر ماسکی وتر

کی تنصیف کرنے والا قطر منحنی سے ملتا ہے -

فرض کرو کہ س س س کوئی ماسکی وتر ہے اور ن ط وہ قطر

ہے جو اس ماسکی وتر کی تنصیف نقطہ ط پر کرتا ہے -

فرض کرو کہ س س اور س س کے ماس نقطہ سے پر ملتے ہیں - اب

سے مرتب پر بھی ہے اور قطر ن ط کے خط پر بھی نیز س ن = ن ط

(دفعہ ۱۳۲)

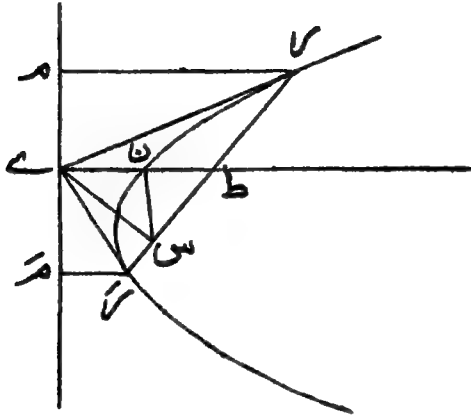
لیکن س س ط قائمہ ناویہ ہے (دفعہ ۱۰۶)

س ن = ن ط = س ن

مرتب پر عمود س س اور س س ملینچو تو

۲ ط س = س س + س س ، کیونکہ س س کا وسطی نقطہ ط ہے

$$\begin{aligned}
 & \text{ر س} + \text{س ر} = \\
 & \text{ر س} = \\
 & \text{ر س} = \text{ن ط} = \text{ن س}
 \end{aligned}$$



وہ ماسکی وتر جو کسی مخصوص قطر سے تنصیف ہو اس قطر کا مبدل کہلاتا ہے جو وتر کی تنصیف کرتا ہے۔ مثلاً 'ر س' قطر 'ن ط' کا مبدل ہے اور ہم نے اسے 'م س ن' کے مساوی ثابت کیا ہے۔ بالخصوص وتر خاص محور کا مبدل ہے اور ہم نے اسے 'م س ن' کے مساوی ثابت کیا ہے۔

۱۳۴۔ مسئلہ۔ اگر ق 'ط' ایک قطر 'ن ط' کا معین ہو تو

ق 'ط' = 'م س ن' × 'ن ط'
 معین ق 'ط' کو خارج کرو اور فرض کرو کہ وہ منحنی سے مکرر ق' پر ملتا ہے تو ق' ط' = ط' ق'۔
 وتر ق' ق' کے متوازی ماسکی وتر 'ر س' ماسکی لکھیو۔ فرض کرو کہ 'ن ط' 'ر س' کو نقطہ 'ع' پر تنصیف کرتا ہے۔

خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دوسرے ثابت
خط ل سے اس کا فاصلہ جہاں ل کا ل کے علی القوائم ہونا ضروری نہیں ہے
خط ل قطع مکانی کا ایک قطر ہے اور ل اس نقطہ پر کا ماس ہے جس پر ل اور
اور ل متقاطع ہوتے ہیں۔

اگر عہ وہ زاویہ ہو جو ق ط محور کے ساتھ بناتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۳۲) تو

$$ق ط = ق سے ن ط پر عمود \times ق م عہ$$

$$اور ن ط = ق سے ن پر کے ماس پر عمود \times ق م عہ$$

$$= (ق سے ن ط پر عمود) \times ق م عہ$$

$$= م سے ن \times ق سے ن ط پر عمود \times ق م عہ$$

$$= \frac{(ق سے ن ط پر عمود)}{ق سے ن پر کے ماس پر عمود} \times م سے ن جب عہ = م سے م$$

جہاں م سے ن پر کے ماس پر عمود م سے م ہے۔

(388)

پس اگر ایک نقطہ ایک مستوی میں اس طرح حرکت کرے کہ ایک
خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع دوسرے خط ل سے اس کے فاصلہ کا
ک گنا ہو (ک مستقل ہے) تو اس نقطہ کا طریق ایک قطع مکانی ہے جس کا
محور ل کے متوازی ہے۔ اس کے خط ل کے متوازی ایک خط میں واقع ہے
ہے جس کا فاصلہ خط ل سے ک ہے اور نیز وہ ایک ایسے خط میں واقع ہے

جول اور ل کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور ل کے ساتھ وہی
زاویہ بناتا ہے جول اس کے ساتھ بناتا ہے۔ خط ل مکانی کے اس نقطہ پر
کا ماس ہے جہاں خط ل مغنی کو قطع کرتا ہے۔
میساکہ دفعہ ۱۲۲ میں دکھایا جا چکا ہے اگر خطوط ل اور ل علی القوائم

ہوں تو ل خود محور ہو جاتا ہے اور ل ماس پر کا ماس۔

۱۳۶ - دائرہ انحناء -

ہم دفعہ ۱۱۹ میں یہ سمجھا چکے ہیں کہ ایک مخروطی کے کسی نقطہ پر دائرہ
انحناء سے کیا مراد ہے۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ ایک قطع مکانی کے کسی
نقطہ پر دائرہ انحناء کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ن پر کے دائرہ انحناء کا مرکز 'ن' پر کے عماد پر واقع ہے۔ پس
اگر ہم اس دائرہ کے 'ا' و 'ن' کا طول کسی سمت میں معلوم کر سکیں جو 'ن'
میں سے گزرتا ہے تو دائرہ کے قطر کا طول اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ
وتر کے دوسرے سرے میں سے ایک خط کھینچا جائے جو وتر پر عمود ہو
اور عماد سے نقطہ 'د' پرے۔ تب دائرہ انحناء کا قطر 'ن د' ہوگا۔

مسئلہ۔ ایک قطع مکانی کے کسی نقطہ 'ن' پر کے دائرہ
انحناء کے وہ دو وتر جنہیں سے ایک محور کے متوازی ہے اور
دوسرا اس کے میں سے گزرتا ہے 'م' میں 'ن' کے مساوی ہوتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ یہ دو وتر مساوی ہونے چاہئیں کیونکہ وہ 'ن' پر کے
ماس کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

اب ایک دائرہ کا خیال کرو جو مکانی کو نقطہ 'ن' پر سے کرتا ہے
اور اسے مکر ایک قریبی نقطہ 'ق' پر قطع کرتا ہے۔ مکانی کا وہ قطر کھینچو
جو 'ق' میں سے گزرے اور فرض کرو کہ وہ دائرہ سے مکرر 'ک' پر اور 'ن'
پر کے ماس سے 'م' پر ملتا ہے۔ قطر 'ن ط' کا سین 'ق ط' کھینچو۔
اب دائرہ سے

$$\text{ما ق} \times \text{ما ک} = \text{ما ن}^2$$

$$\therefore \text{ما ک} = \frac{\text{ما ن}^2}{\text{ما ق}} = \frac{\text{ق ط}^2}{\text{ن ط}} = \text{ما م} \quad (\text{دفعہ ۱۳۴})$$

انتہا میں جبکہ 'ق' 'ن' تک حرکت کرتا ہے اور بالآخر 'ا' پر
منطبق ہوتا ہے 'ما ک' دائرہ انحناء کا وہ وتر ہو جاتا ہے جو 'ن' میں سے

مثالیں

- ۱۔ ایک قطع مکانی کا ایک ماسکی وتر n میں n ہے اور n اور n کے محمد پر معین ہیں۔ ثابت کرو کہ
- $n \times n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
- ۲۔ قطعات مکانی کا ایک سلسلہ ایک دے ہوئے خط کو مس کرتا ہے اور ایک مشترک ماسک رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے راس ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔
- ۳۔ اگر ایک خط مستقیم ایک مستوی کے ایک نقطہ کے گرد گردش کرے اور خود خط مستقیم بھی اسی مستوی میں ہو تو ثابت کرو کہ ایک دی ہوئی آن پر خط مستقیم کے نقطوں کی حرکت کی سمتیں ایک قطع مکانی کے ماسوں پر منطبق ہونگی۔
- ۴۔ ایک قطع مکانی کے نقطوں کے معین ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کئے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان تقسیم کرنے والے نقطوں کا طریق ایک دوسرا قطع مکانی ہے۔
- ۵۔ ایک قطع مکانی کے ماسکی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق بھی ایک قطع مکانی ہوتا ہے جس کا وتر خاص ابتدائی قطع مکانی کے وتر خاص کا نصف ہے۔
- ۶۔ اگر قطر n کا ایک معین q n ہو اور قطر پر عمود q ہو تو ثابت کرو کہ

$$q \times q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

- ۷۔ اگر ایک قطع مکانی کا عماد نقطہ n پر کھینچا جائے اور وہ محور سے g پر ملے تو

$$n \times g = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

- ۸۔ ایک قطع مکانی کے دو وتر n q n راس ہیں n q n

قطر سے جو Γ میں سے گذرتا ہے نقطہ F پر ملتا ہے اور Γ اس قطر سے جو Q میں سے گذرتا ہے نقطہ E پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ E و F Γ پر کے ماس کے متوازی ہے۔

[قطع مکانی کی تفصیل ایک دائرہ میں اس طرح کرو کہ E مرکز میں منظر ہو جائے]

۹۔ اگر ایک دائرہ ایک قطع مکانی کو Γ پر Γ سے قطع کرے اور Q اور Γ پر قطع کرے تو Q اور Γ میں سے گذرنے والے قطر دائرہ سے کمرے ایسے نقطوں پر ملینگے جو ایک خط میں واقع ہوں گے اور یہ خط Γ پر کے ماس کے متوازی ہوگا۔ [دفعہ ۱۱ کا نتیجہ صریح استعمال کرو]

۱۰۔ اگر ایک قطع مکانی کے دو ثابت ماس Γ اور Γ ہوں اور ایک متغیر ماس انہیں علی الترتیب نقاط L اور H پر قطع کرے تو نسبتیں L : Γ اور Γ : L : H مساوی اور مستقل ہونگی۔

۱۱۔ اگر ایک قطع مکانی کے دو ماس Γ اور Γ ایک تیسرے ماس سے نقطوں L اور H پر منقطع ہوں تو

$$\frac{L}{\Gamma} + \frac{H}{\Gamma} = 1$$

۱۲۔ اگر ایک قطع مکانی کا Γ پر کا عماد منحنی سے کمرے Q پر ملے اور Γ کا معین Γ ہو اور Γ کا قطب T ہو تو

$$Q : \Gamma = \Gamma : L : A$$

۱۳۔ اگر Γ پر کا ماس مرتب سے ملے اور محدود و ترافض سے D پر ملے تو

$$D = S$$

۱۴۔ ایک قطع مکانی کے ماس Γ اور Γ ہیں اور Γ اور Q میں سے گذرنے والے ماس Γ میں سے گذرنے والے کسی خط سے نقطوں H اور L پر ملے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$D = L = \Gamma : \Gamma = \Gamma : Q$$

۱۵۔ اگر ایک قطع مکانی کے نقطہ ن پر کے ماس پرست کوئی نقطہ ہو اور دست میں سے گزرنے والا قطر منحنی سے ق پر ملے تو

$$س ق = ۲ س ن \times س ر ق$$

۱۶۔ اگر وتر ن ق جوت پر ایک قطع مکانی کا عماد ہے اس پر نسبت زاویہ بنائے تو

$$س ق = ۲ س ن$$

۱۷۔ اگر ایک قطع مکانی کے دو متعین ن ل اور ن ل ایسے ہوں کہ وہ دائرہ جو ل ل پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو قطع مکانی کو مس کرے تو

$$ل ن + ل ن = ل ل$$

۱۸۔ ایک قطع مکانی کے دو ماس ت ن اور ت ق ہیں اور ت ق اور ت ن پر علی الترتیب ن گ اور ق ل عمود کھینچے گئے۔ ثابت کرو کہ مثلثات س ت ک اور س ت ل مساوی ہیں

۱۹۔ ایک قطع مکانی کے ماس ت ن اور ت ن ہیں اور ت میں سے گزرنے والا قطر منحنی کو ق پر قطع کرتا ہے۔ اگر ن ق، ن ق علی الترتیب ت ن، ت ن کو س اور س پر قطع کریں اور س اور س میں گزرنے والے قطر منحنی کو علی الترتیب ط، ط پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ن ط اور ن ط، ت ق پر متقاطع ہوتے ہیں۔

[قطع مکانی کو ایک دائرہ میں اور ت میں سے گزرنے والے ن ن کے متوازی خط کو لاتینا ہی پر غفلت کرو]

۲۰۔ ثابت کرو کہ کوئی دائرہ جو ایک قطع مکانی کے ایک وتر پر اسے قطر مانکر کھینچا گیا ہو مرتب سے نہیں مل سکتا والا ن کہ وتر ایک ماسکی وتر ہو اور اس صورت میں دائرہ مرتب کو مس کرے گا۔

۲۱۔ اگر ایک قطع مکانی کے ماسوں کا ایک زوج ت ن اور ت ق ہو اور وتر ن ق، ن پر عماد ہو تو ت ن مرتب سے تنصیف ہوگا

۲۲۔ مثلث (ج ب ج) ایک قطع مکانی کو جسکا ماسکہ س ہے

حائط کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گزرنے والے وہ خطوط جو علی الترتیب 'س' 'ا' 'س' 'ب' 'س' 'ج' پر عمود ہیں ہم نقطہ ہیں۔
 ۲۳۔ ایک قطع مکانی کے نقطوں 'ن' اور 'ن' پر کے تماس 'ق' پر متقاطع ہوتے ہیں اور وہ دائرے جو مثلثات 'س' 'ن' 'ق' اور 'س' 'ن' 'ق' کو حائط کرتے ہیں محور سے مکرر 'س' اور 'س' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ن' 'س' اور 'ق' 'س' متوازی ہیں۔

(142)

۲۴۔ ایک دیا ہوا مثلث 'ا' 'ب' 'ج' ایک مستوی میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکا ایک ضلع 'ا' 'ب' ہمیشہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور 'ا' 'س' 'ا' ایک دے ہوئے خط مستقیم پر رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ضلع 'ا' 'ج' ایک قطع مکانی کو ملفوف کرے گا۔

۲۵۔ ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وہ دے ہوئے دائروں پر 'س' سے ہمیشہ مساوی وتر منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس خط کا لٹاف ایک قطع مکانی ہے جس کے 'ا' 'س' پر کا تماس دے ہوئے دائروں کا بنیادی محور ہے۔
 ۲۶۔ ایک خط ایک قطع مکانی سے محور کی ایک ہی جانب نقطوں 'ن' اور 'ن' پر ملتا ہے۔ 'ا' 'ن' کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ منحنی سے مکرر نقطہ 'ق' پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ 'ق' کا معین 'ن' اور 'ن' کے معینوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۲۷۔ ایک قطع مکانی کے دو تماسوں کے نقطہ تقاطع کا محور سے فاصلہ ان کے نقاط تماس کے معینوں کے مجموعہ کا نصف ہوتا ہے۔

۲۸۔ اگر ایک قطع مکانی کا وتر خاص 'خ' 'خ' ہو اور کسی نقطہ 'ن' پر کا تماس نقطہ 'خ' پر کے تماس سے نقطہ 'ط' پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$س \times خ \times ن = ط \times خ \times ط$$

۲۹۔ ایک دائرہ ایک قطع مکانی کو نقطہ 'ن' پر مس کرتا ہے اور اسکا 'س' میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ قطع مکانی دائرہ سے مکرر ملے گا یا نہیں ملے گا بموجب اس کے کہ وتر خاص 'س' 'ن' سے کم ہو یا نہ ہو۔

۳۰۔ ایک قطع مکانی کے نقطہ ق پر کا عماد ق ق ہے جو قطع مکانی سے مکرر ق پر ملتا ہے۔ ق ن، محور اور عماد دونوں کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہے اور منحنی سے مکرر نقطہ ن پر ملتا ہے۔ ق ق کا نقطہ وسطی ط ہے اور ن ط محور سے نقطہ س پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق س ن س ایک ہی دائرہ پر واقع ہیں جہاں س قطع مکانی کا ماسک ہے۔

۳۱۔ مساوی وتر خاص والے دو قطعات مکانی ایک ہی محور پر ہیں اور ایسے ہیں کہ ایک کے کسی ماس کا وہ حصہ جو دوسرے سے منقطع ہوتا ہے اس عمود کے مساوی ہے جو اس ماس پر پہلے قطع مکانی کے ماسک کیجھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر دو وتر خاص ان کے راسوں کے درمیانی فاصلہ کا ۶۴ گنا ہے۔

۳۲۔ ایک دائرہ ایک قطع مکانی کو محور کے دو ہرے معین ن ن کے دونوں سروں پر مس کرتا ہے۔ ن پر کا عماد دائرہ سے نقطہ س پر اور مکانی سے نقطہ ق پر ملتا ہے۔ قطع مکانی کا وہ قطر جو ق میں سے گزرتا ہے ن ن سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ق س ع، ن ن کو ع پس کرتا ہے۔

۳۳۔ ایک قطع مکانی کے محور کا ایک دو ہرے معین ع ف ہے اور اس پر کوئی نقطہ س ہے۔ س میں سے گزرنے والا قطر منحنی سے نقطہ ن پر ملتا ہے۔ ن پر کا ماس ع اور ف میں سے گزرنے والے قطروں کو م اور ل پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن س، ع م اور ف ل کے درمیان ایک وسط تناسب ہے۔

۳۴۔ اگر ایک قطع مکانی دو سرے مساوی قطع مکانی پر لڑے کے اور ابیت م ان کے راس ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو ثابت کرو کہ قبل الذکر قطع مکانی کا ماسک ثابت قطع مکانی کا مرتبہ قسم کر دیا۔

۳۵۔ اگر ایک قطع مکانی پر جس کا راس (بے کوئی نقطہ ن ہو اور ن س، ن پر عمود ہو اور محور سے س پر ملے تو وہ دائرہ جس کا مرکز س اور نصف قطر س ن ہو اس معین کے سروں میں سے گزرے گا جو س میں سے س کیجھا گیا ہے۔ نیز اگر دائرہ اور قطع مکانی کے مشترک ماس کیجھے جائیں تو ان نقطوں

معین جہاں وہ قطع مکانی کو مس کرتے ہیں دائرہ کے ماس ہونگے۔
 ۳۶۔ ایک قطع مکانی پر کے کسی نقطہ میں سے دو وتر کھینچے گئے ہیں جو اس نقطہ پر کے ماس سے مساوی طور پر باطل ہیں۔ ثابت کرو کہ ان وتروں کے طول ان کے قطروں کے ان حصوں کے متناسب ہیں جو ان کے اور معنی کے درمیان منقطع ہوتے ہیں۔

۳۷۔ ایک قطع مکانی کے ماس $ت ق$ اور $ت م$ پر کے ماس سے نقطوں $ما$ اور $س$ پر ملتے ہیں اور $ت م$ محور کے متوازی کھینچا گیا ہے جو قطع مکانی سے $ع$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ع$ پر کا ماس $ما$ کے وسطی نقطہ میں سے گزرتا ہے اور یہ کہ اگر میں ماسکہ چوتو

ما $س = ۴$ $ت م$ $ت ق$

۳۸۔ $ت ق$ ایک قطع مکانی کا ایک عمادی وتر ہے جو محور سے گ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ما$ سے گ کا فاصلہ $ت م$ اور $ت ق$ کے معین اور وتر خاص چار تناسبات ہیں۔

۳۹۔ ایک قطع مکانی کے ماسکہ میں سے خطوط کھینچے گئے ہیں جو قطع مکانی کے ماسوں کو ایک مستقل زاویہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

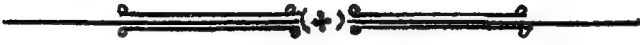
۴۰۔ قطع مکانی کے وتر خاص کے ایک سرے پر کا نصف قطر انحراف عماد کے دو چند کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۱۔ قطع مکانی کے وتر خاص کے کسی سرے پر کا قطر اس کے دوسرے سرے پر کے دائرہ انحراف کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۴۲۔ اگر ایک قطع مکانی کے کسی نقطہ $ن$ پر کا ماس محور سے نقطہ $ت$ پر ملے اور دائرہ انحراف معنی سے نقطہ $ق$ پر ملے تو $ن ق = ۴$ $ت م$ ۔

۴۳۔ اگر ایک قطع مکانی کے نقطہ $ن$ پر کے نصف قطر انحراف کا وسطی نقطہ $ما$ ہو تو $ن$ $ما$ کے عمادی ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بنے گا۔

۴۴ — قطع مکانی کے کسی نقطہ سے اس کے راس پر کے دائرہ انحاء کا ماس اس نقطہ کے فصلہ کے مساوی ہوتا ہے۔
 ۴۵ — قطع مکانی کے کسی نقطہ پر اس میں سے گزرنیوالا وتر انحاء $\frac{MA^2}{AN}$ ہوتا ہے جہاں MA اس عمود کا پائین ہے جو ماسک سے N پر کے ماس پر کھینچا گیا ہے۔



بارہواں باب

قطع ناقص

(114)

۱۳۷۔ ہم نے دفعات (۹۸) اور (۹۹) میں قطع ناقص کی عام شکل دکھا دی ہے اور یہ ثابت کیا ہے کہ اس کے تشاکل کے دو محور ایک دوسرے کے علی القوائم ہوتے ہیں جو ج پر جسے مرکز کہتے ہیں متقاطع ہوتے ہیں۔ محور اعظم (۱) پر دو واسکے S اور S' ہوتے ہیں جن کا فاصلہ محور اصغر کے سروں B اور B' سے J کے مساوی ہوتا ہے اور ان واسکوں کے جواب میں دو مرتبہ J کے علی القوائم ہوتے ہیں اور اسے خارجہ J اور J' پر اس طرح قطع کرتے ہیں کہ $J : S = J' : S'$ اور $J : J' = J' : J$ جہاں J خروج مرکز ہے۔ محور اعظم کے سروں B اور B' کو قطع ناقص کے راس کہنے میں سہولت ہے۔

یہ ذہن نشین رہے کہ نسبت $J : S$ ج $J' : S'$ جتنی چھوٹی ہوگی قطع ناقص دائری شکل کے قریب تر ہوگا اور $J : S$ ج $J' : S'$ ج اتنی بڑی ہوگی کہ پہنچے بغیر جتنا بڑا ہوگا قطع ناقص زیادہ تر پھیلتا جائیگا۔
چونکہ ہمیشہ

$$J : S = J' : S'$$

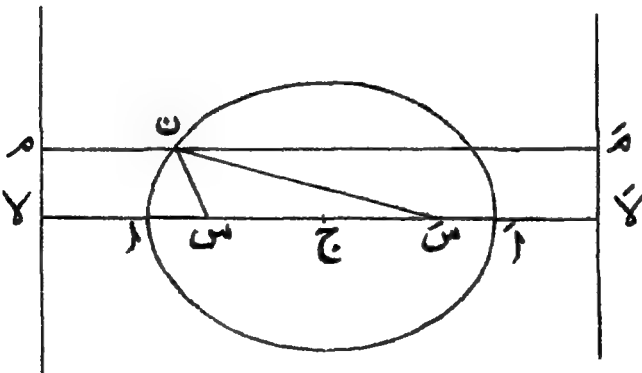
اس لئے اگر ج ۱ کو مستقل کیا جائے تو جیسے ج میں بڑھتا ہے ج جب گھٹتا ہے اور بالعکس۔ اور ہم یہ سمجھا چکے ہیں کہ ایک دائرہ کو ایک قطع ناقص کی انتہائی صورت سمجھا جاسکتا ہے جبکہ ناقص کے دو واسکے مرکز پر منطبق ہوں۔

اب ہم وہ امتیازی ہندسی خواص ثابت کرتے ہیں جو تمام قطع ناقص کے لئے مشترک ہیں۔

۱۳۸۔ ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل۔
مسئلہ۔ قطع ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کا مجموعہ مستقل اور ۱ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قطع ناقص پر کوئی نقطہ ن ہے اور م ن م و ہ عمود ہے جون میں سے م رتوں پر کھینچا گیا ہے (دیکھو شکل)۔

(145)



اب $م ن = ن م$ اور $م ن = ن م$

$ن م + م ن = ن م + م ن = ن م + م ن$

$$11 = 1 \cdot 7 = 4 \cdot 3 =$$

نتیجہ صریح۔ دو ہم ماسکی قطعات ناقص (یعنی جن میں دونوں
 اسکے مشترک ہوں) ایک دوسرے کو قطع نہیں کر سکتے۔

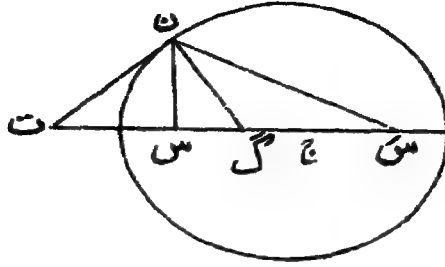
۱۳۹۔ وہ سید جو ابھی ثابت کیا گیا ہے یہ ظاہر کرتا ہے کہ قطع ناقص کو ایک مستوی میں ایک نقطہ کا طریق سمجھا جاسکتا ہے جبکہ اس مستوی میں کئے دو ثابت نقطوں سے متحرک نقطہ کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ اور اس سے ہم یہ سمجھتے ہیں کہ اگر تار کے ایک ٹکڑے کے سروں کو دو پیوؤں سے جو کاغذ میں کھڑی نصب کی گئی ہوں باندھ دیا جائے اور باندھتے وقت تار کا اتنا ہوا نہ رہے اور پھر منسل کے ذریعہ تار کا کوتنا کر پکڑا جائے اور منسل کی نوک سے تمام ممکن محلوں پر نشان لگائے جائیں تو اس طرح ایک قطع ناقص حاصل ہو جائیگا۔

تاہم وہ تمام قطعات ناقص کھینچ سکتے ہیں جن کا محور اعظم تو ایک ہی ہے لیکن خروج المکرز جدا جدا ہیں۔ یہ معلوم ہو گا کہ جن بقیے زیادہ باہم قریب ہونگے قطع ناقص دائری شکل کے قریب آتا جائیگا۔

۴۰۔ - حماس اور عجاو۔

مسئلہ۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر کے محاس اور
عماد اس نقطہ کے ماسکی فاصلوں کے درمیانی زاوے کی
علی الترتیب خارجی اور داخلی تنصیف کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن پر کے ماس اور عماد محور اعظم سے علی الترتیب
ت اور گ پر ملے ہیں۔



اب دفعہ ۱۱۱ کی رو سے

س گ = ز x س ن اور س گ = ز x س ن

س گ : گ س = س ن : ن س

ن گ زاویہ س ن س کی تنصیف کرتا ہے۔

ن ت کو جو ن گ کے علی القوائم ہے س ن س کے خارجی زاوے کی تنصیف کرنا چاہئے۔

نتیجہ صریح۔ ج گ x ج ت = ج س

کیونکہ ن گ اور ن ت س ن اور س ن کے درمیانی زاویوں کا ناصف ہیں اور اسلئے

(گ ت س س) = ۱۔

۱۴۱۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن کے ماسن پر

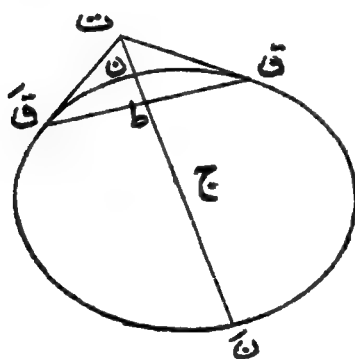
ماسکوں سے عمود س م، م س، م ہوں تو م ا اور م ا اُس دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو محور اعظم ۱۱ پر اسے قطر مان کر کھینچا گیا ہو اور

امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔

۱۴۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع ناقص کے ماسوں کا ایک زوج ت ق اور ت ق ہو اور قطع ناقص کا مرکز ج ہو اور ج ت ق ق سے ط پر اور منحنی سے ن پر ملے تو

$$ج ط \times ج ت = ج ن$$

148) فرض کرو کہ n ج قطع ناقص سے گزرنے پر ملتا ہے۔ اب چونکہ
ت اور ق ق قطب اور قطبی میں اسلئے (ت ط' ن ن) = ۱-
ج ط x ج ت = ج ن^۲ کیونکہ ن ن کا وسطی نقطہ ج ہے۔



۳۴۱۔ دفعہ سابق کا مسئلہ اہم ہے اور حسب ذیل اس کی

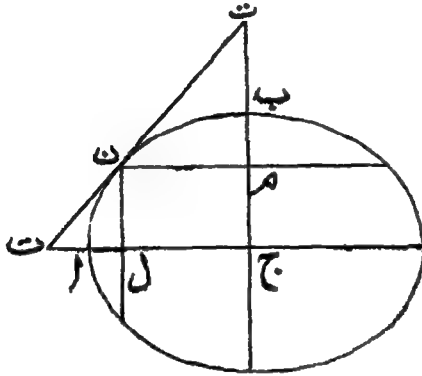
ایک خاص صورت ہے۔

اگر نیکو کامیاب محاورا غم اور اصغر سے ت اور ت پر ملے

اور ان محوروں پر متعین ن ل ن م ہوں تو

$$ج ل \times ج ت = ج ا$$

$$ج م \times ج ت = ج ب$$

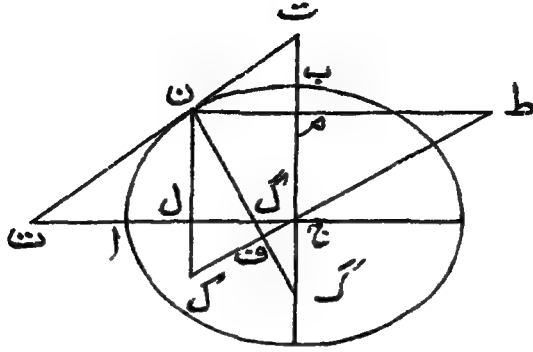


کیونکہ ت ن پر کے ماس اور اُس نقطہ پر کے ماس کا نقطہ تقاطع ہے جہاں ن ل منحنی سے مکرر ملتا ہے اور ت ن پر کے ماس اور اُس نقطہ پر کے ماس کا نقطہ تقاطع ہے جہاں ن م منحنی سے مکرر ملتا ہے۔

۱۴۴۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر کا عماد محاورا عظم اور اصغر سے گ اور گ پر ملے اور ن پر کے ماس کے متوازی قطر سے ف پر ملے تو

$$ن ف \times ن گ = ب ج \times ن ف = گ ا$$

محوروں پر متعین ن ل اور ن م کہیں جو اور فرض کرو کہ وہ ن پر کے ماس کے متوازی قطر سے گ اور ط پر ملتے ہیں (دیکھو شکل)۔



فرض کرو کہ ن پر کا ماس محاور اعظم اور اصغر سے ت اور ت پر
ملتا ہے۔
اب ل گ ف گ دائری ہے کیونکہ ل اور ف قائمہ
زاوے ہیں۔

۱. ن ف × ن گ = ن ل × ن ک = ج م × ج ت = ب ج^۲
نیز گ ف مرط دائری ہے کیونکہ ف اور م قائمہ زاوے ہیں۔

۲. ن ف × ن گ = ن م × ن ط = ج ل × ج ت = ج ا^۲

۱۱۴۴۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا عماد

محور اعظم سے گ پر ملے اور اس محور پر ن ل معین ہو تو

$$ج گ = ز ا \times ج ل$$

فرض کرو کہ ن پر کا ماس محور اعظم سے ت پر ملتا ہے۔

دفعہ ۱۴۰ میں ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ج گ × ج ت = ج س^۲

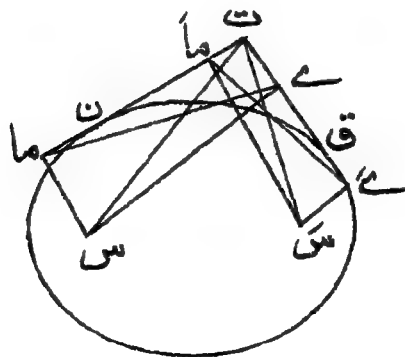
لیکن ج ل × ج ت = ج ا^۲
ج گ : ج ل = ج س : ج ا = ز ا

ج گ = ز' x ج ل
نتیجہ صریح - ل گ : ل ج = ب ج : ا ج
کیونکہ ج گ : ج ل = ج س : ج ا
∴ ج ل - ج گ : ج ل = ج ا - ج س : ج ا
= ب ج : ا ج

۱۴۲ اب۔ عماسوں کا زوج۔

مسئلہ۔ اگر ایک بیرونی نقطہ سے قطع ناقص کے دو ماس کھینچے جائیں تو وہ اس کے ماسکی فاصلوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

فرض کرو کہ تن اور ت ق ماس ہیں یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ $\Delta \text{ تن دس} = \Delta \text{ ت ق}$ -
تن پر عمود س ما اور س ما کھینچو اور ت ق پر عمود س س اور س س نکالو۔



اب $س\ ماس \times س\ ما = ب\ ج = س\ س \times س\ س$ کے

(دفعہ ۱۴۱)

۔ $س\ ماس : س\ س = س\ س : س\ ما$

نیز $د\ ماس = د\ مات$ کے کا تمام

(کیونکہ $س\ ماس$ کے دائرہ ہے)

$= د\ ماس$ کے (کیونکہ $د\ مات$ کے $س\ س$

دائرہ ہے)

۔ $د\ س\ ماس$ اور $س\ س$ کے $ما$ متشابہ ہیں اور

$د\ س\ س = د\ س\ ماس$

لیکن $د\ س\ س = د\ س\ ماس$ کے $س\ س$ ایک ہی قطع ہیں

اور $د\ س\ ماس = د\ س\ س$ کے " "

۔ $د\ س\ س = د\ س\ ماس$

۱۴۵۔ مرتب دائرہ -

مسئلہ - ان نقطوں کا طریق جن سے قطع ناقص کے

ماس علی القوائم ہوں ایک دائرہ ہوتا ہے (جسے قطع ناقص کا

مرتب دائرہ کہتے ہیں) -

فرض کرو کہ دو ماس $ت\ ن$ اور $ق\ ق$ علی القوائم ہیں -

$ت\ ن$ پر عمود $س\ ماس$ کھینچو کہ وہ $س\ ن$ سے $ک$ پر ملے -

اب دفعہ ۱۴۱ کی رو سے $س\ ماس = ماس$ اور $س\ ک = ا\ ا$

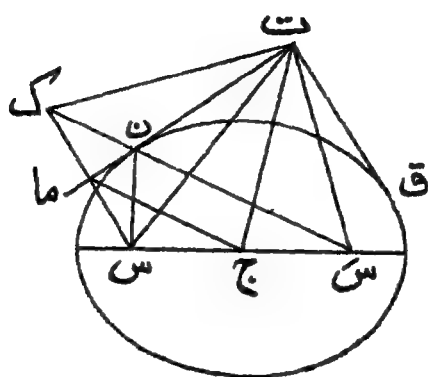
نیز $د\ س\ ماس = د\ ک$ کیونکہ $س\ ماس = ک$ ماس اور

مات مشترک ہے اور $ما$ پر کے زاویے قائمہ ہیں -

۔ $س\ ت = ک\ ت$ اور $د\ ک\ ت = د\ س\ ت$

$= د\ ق\ ت$ (دفعہ ۱۴۲ اب)

∴ دکتس = دنتق = ایک قائمہ زاویہ



اب ۲ ج ۲ ت ۲ + ج ۲ س ۲ = س ۲ ت ۲ + س ۲ ت ۲ (دفعہ ۱۰)

= گ ت + س ت

= گ س

$$172 =$$

ج ت = ج ۲ - ج ۱ - ج س = ج ۲ - (ج ۱ - ج ب)

$$z = z_1 + z_2$$

جس کا مربع $(ج + ا)^2$ ہے اور اس کے نصف قطر کا مربع $ج(ج + ا)$ ہے۔

۱۴۶۔ مزدوج قطر۔

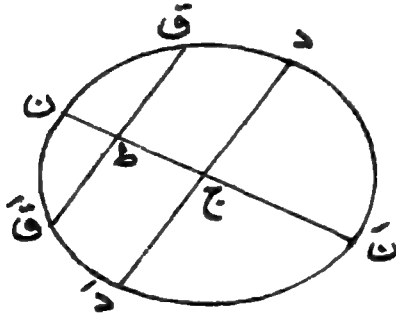
طالب علم ایک مخروطی کے مزدوج خطوں کے مفہوم سے پہلے سے ہی آگاہ ہے کہ دو خطوں اس وقت مزدوج کہلاتے ہیں جب ہر ایک میں دوسرے کا قطب واقع ہو۔ جب مزدوج خطوں کا ایک زوج ایک قطع ناقص کے مرکز پر ملے تو انہیں مزدوج قطر کہتے ہیں۔

سہولت ہوگی کیونکہ ان میں سے ہر خط قطر بھی ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ فردوج قطر ایسے ہوتے ہیں کہ ان نقطوں پر کے حاس جہاں ان میں سے کوئی ایک منحنی سے ملتا ہے دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔ فرید بریں وہ تمام و تز جو دو فردوج قطروں میں سے ایک کے متوازی ہوں دوسرے سے متصیف ہوتے ہیں (دفعہ ۹۵) اور یہ و تراش قطر کے دوسرے معین ہیں جو انکی اس طرح متصیف کرتا ہے۔ قطع ناقص کے محور فردوج قطر و لکا وہ مخصوص زونج ہیں جو باہم علی لقوا تم ہیں۔

152)

۱۲۷۔ مسئلہ۔ اگر ق ط ایک قطع ناقص کے قطر
ن ج ن کا ایک معین ہو اور ج ن کا فردوج قطر د ج د
ہو تو

$$ق ط : ن ط \times ط ن = ج د : ج ن$$



ق ط کو خارج کر کہ وہ قطع ناقص سے مکرر قی پر ملے تو بیوں
کے مسئلہ کی رو سے

$$ط ق \times ط ق : ط ن \times ط ن = ج د \times ج د : ج ن \times ج ن$$

لیکن ط ق = - ط ق، ج د = - ج د، ج ن = - ج ن

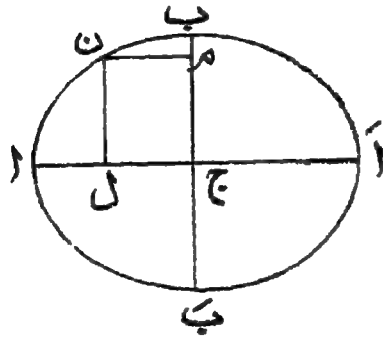
$$ق ط : ن ط \times ط ن = ج د : ج ن$$

۱۴۸۔ مسئلہ سابق کی خاص صورتیں حسب ذیل ہیں۔
اگر ن ل اور ن مر ایک قطع ناقص کے محاورا عظم اور
اصغر کے متعین ہوں تو

$$ن ل : ا ل \times ل ا = ب ج : ا ج$$

$$ن مر : ب مر \times مر ب = ا ج : ب ج$$

$$\text{نتیجہ صریح۔ وتر خاص} = \frac{۲ ب ج}{ا ج}$$



کیونکہ اگر س خ نیم وتر خاص ہو تو

$$س خ : ا س \times س ا = ب ج : ا ج$$

$$\text{اور } ا س \times س ا = ب ج$$

۱۴۹۔ دفعہ ۱۴۸ کے خواص سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع ناقص کو
ایک مستوی میں ایسے نقطہ کا طریق سمجھا جاسکتا ہے کہ اس مستوی کے ایک
ثابت خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع دو دوسرے ثابت خطوں
ل اور ل سے اس کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے ساتھ ایک
مستقل نسبت رکھتا ہے جہاں خطوط ل اور ل خط ل پر عمود ہیں اور نقطہ
کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں۔

خط ل، قطع ناقص کے محوروں میں سے ایک ہے اور خطوط ل اور ل' دوسرے محور کے سروں پر ماس ہیں۔
 دفعہ ۱۴ میں ثابت شدہ خاصیت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع ناقص کو ایک مستوی میں ایسے نقطہ کا طریق بھی سمجھا جاسکتا ہے کہ اس مستوی کے ایک ثابت خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع دو دوسرے ثابت خطوں ل اور ل' سے اس کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھے جہاں خطوط ل اور ل' ایک دوسرے کے متوازی ہیں (لیکن انکا خط ل پر عمود ہونا ضروری نہیں ہے) اور نقطہ کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں۔ خط ل، قطع ناقص کا ایک قطر ہے اور خطوط ل اور ل' ان نقطوں پر ماس ہیں جہاں ل منحنی سے ملتا ہے۔
 کیونکہ طالب علم خود آسانی سے یہ ثابت کر سکتا ہے کہ
 حسب ترقیم دفعہ ۱۴

$$ق ط : ن ط \times ط ن$$

= ن ن پر ق سے عمود کا مربع : ق اور ق پر
 کے ماسوں پر ق سے عمودوں کا حاصل ضرب

امدادی دائرہ

۱۵۰۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو اور
 محورا عظم کا معین ن ل ہو اور اگر ل ن امدادی دائرہ
 سے نقطہ ن پر ملے تو

$$ل ن : ل ن = ب ج : ا ج$$

دفعہ ۱۴ کی رو سے

$$ن ل : ل ا \times ل ا = ب ج : ا ج$$

اور چونکہ $ا ن ا$ ایک نیم دائرہ میں ہے وہ ایک قائمہ زاویہ ہے اسلئے

$$ا ل = ا ل \times ل ا$$

$$ن ل : ن ا = ل ا : ا ج$$

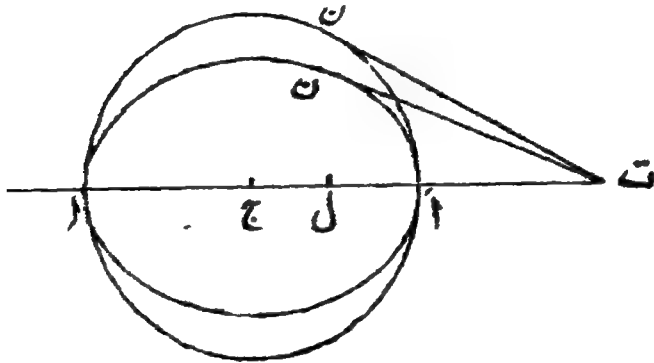
ن اور ن کو قطع ناقص اور امدادی دائرہ پر نظیری نقطے کہتے

ہیں۔ دو نظیری نقطوں پر کے مماس محور اعظم کے خط سے ایک ہی نقطہ (154) پر ملینگے کیونکہ فرض کرو کہ محور اعظم کے خط سے نقطہ ن کا مماس نقطہ

ت پر ملتا ہے تو $ا ج ل \times ا ج ت = ج ا$ (دفعہ ۱۴۳)

نہ دائرہ کے مماس سے ت ا ل کا قطب ہے یعنی ن پر

کا مماس ت میں سے گذرتا ہے۔



طالب علم بطریقہ اسی طریقہ سے یہ ثابت کر سکتا ہے کہ اگر محور اصغر کا معین ن م اس دائرہ سے جو ج ج پر اسے قطر مان کر بنایا گیا ہو نقطہ ن پر ملے تو

$$ن م : ن م = ا ج : ج ا$$

اس تمام بحث سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک دائرہ کے ایک

معیّن سب کے سب ایک ہی نسبت میں تقسیم کئے جائیں تو تقاطع تقسیم
ایک قطع ناقص مرسم کریں گے جس کا ایک محور دائرہ کا مذکورہ بالا قطر ہوگا۔

۱۵۱۔ مسئلہ۔ اگر ج ن اور ج د، ایک قطع ناقص کے

مزدوج نیم قطروں کا ایک زوج ہوں اور ن اور د کے
جواب میں امدادی دائرے پر نقطے ن اور د ہوں تو

ن ج د ایک قائمہ زاویہ ہوگا۔

فرض کرو کہ ن اور ن پر کے ماس محور اعظم سے ت پر ملتے
ہیں۔ معین ن ل اور د م لکھیں۔

اب چونکہ ج د، ت ن کے متوازی ہے اس لئے ن ل ت
د م ج کے متشابہ ہے۔

ن ل : د م = ل ت : م ج

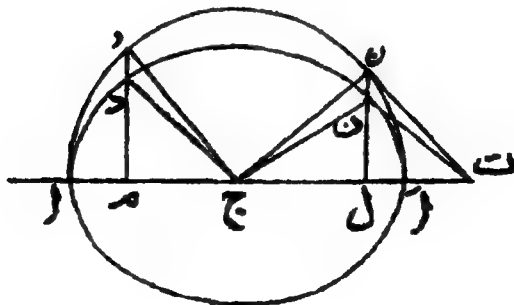
لیکن چونکہ ن ل : ن ل = ب ج : ا ج = د م : د م

ن ل : د م = ن ل : د م

ن ل : د م = ل ت : م ج

ن ل : ل ت = د م : م ج

یعنی



چونکہ Δ ن ل ت اور د م ج میں م اور ل پر
کے زاوے مساوی ہیں اس لئے وہ متشابه ہیں۔

$$\Delta \text{ م ج د} = \Delta \text{ ل ت ن}$$

ج د ت ن کے متوازی ہے۔

$$\Delta \text{ د ج ن} = \Delta \text{ ج ن ت} = \text{ایک قائمہ زاویہ}$$

نتیجہ صریح۔ $\text{ن ل} = \text{ج م اور د م} = \text{ج ل}$

کیونکہ $\Delta \text{ ج ل ن} = \Delta \text{ د م ج}$
اس لئے نیز

$$\text{ن ل} : \text{ج م} = \text{ب ج} : \text{ا ج}$$

$$\text{د م} : \text{ج ل} = \text{ب ج} : \text{ا ج}$$

۱۵۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع ناقص کے مزدوج نیم قطر ج ن

اور ج د ہوں تو

$$\text{ج ن}^2 + \text{ج د}^2 = \text{ج ا}^2 + \text{ج ب}^2$$

دفعہ ماسبق کی شکل استعمال کرتے سے

$$\text{ج ن}^2 = \text{ج ل}^2 + \text{ن ل}^2 = \text{ج ل}^2 + \frac{\text{ب ج}^2}{\text{ا ج}} \times \text{ن ل}$$

$$\text{اور ج د}^2 = \text{ج م}^2 + \text{د م}^2 = \text{ن ل}^2 + \frac{\text{ب ج}^2}{\text{ا ج}} \times \text{د م} = \text{ن ل}^2 + \frac{\text{ب ج}^2}{\text{ا ج}} \times \text{ج ل}$$

$$\therefore \text{ج ن}^2 + \text{ج د}^2 = (\text{ن ل}^2 + \frac{\text{ب ج}^2}{\text{ا ج}} \times \text{ن ل}) + (\text{ن ل}^2 + \frac{\text{ب ج}^2}{\text{ا ج}} \times \text{ج ل})$$

$$= (\text{ن ل} + \frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}}) (\text{ن ل} + \frac{\text{ب ج}}{\text{ا ج}}) = (\text{ا ج} + \text{ب ج})^2$$

(156)

اس طرح قطع ناقص کے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل اور $(ا + ب)^2$ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کر سکتے ہیں۔

دفعہ ۱۵۱ میں ثابت کیا گیا ہے کہ $ن ل = ج م$

$ج م + ج ل = ن ل + ج ل = ج ن = (ج + ل)$

ٹھیک اسی طرح محور اصغر کے معین پھینچنے اور $ب ب$ پر اسے قطر مانکر جو دائرہ کھینچا جائے اسے استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

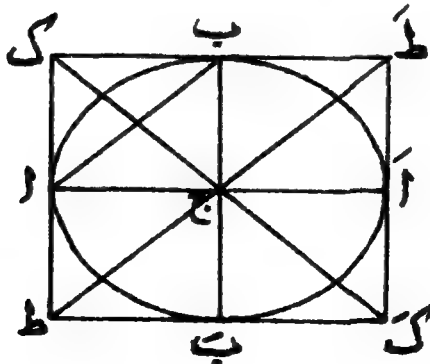
$$ن ل + د م = ب ج$$

اس لئے جمع کرنے سے

$$ج ن + ج د = (ج + ل) + ب ج$$

۱۱۵۲۔ مساوی مزدوج قطر۔

قطع ناقص کے مزدوج قطروں کا ایک زوج ایسا ہوتا ہے کہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں یعنی وہ قطر جو اس مستطیل کے وتروں پر واقع ہیں جو محاورہ اعظم اور اصغر کے سروں پر کے ماسوں سے بنتا ہے۔



مستطیل کے دتروں پر کے قطروں کا مساوی ہونا منحنی کے تشاکل سے ظاہر ہے اور انکا مزدوج ہونا اس واقعہ سے معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کی شکل میں چونکہ گ ج ' (ب کی تنصیف کرتا ہے جو ط کے متوازی ہے اسلئے ج گ اور ج ط مزدوج خطوط ہیں۔

۱۵۲ اب۔ اگر ج ن اور ج د ' ایک قطع ناقص کے مزدوج نیم قطروں کا ایک زوج ہو تو

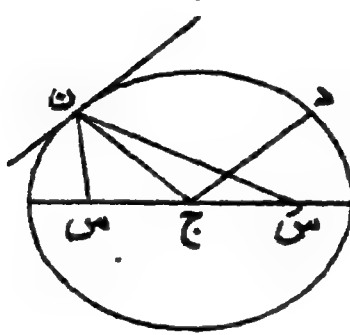
$$س ن \times س ن = ج د$$

چونکہ س س کا وسطی نقطہ ج ہے اس لئے

$$ج ن + ج د = س ن + س ن$$

$$= (س ن + س ن) - ۲ س ن \times س ن$$

$$= ج د - ۲ س ن \times س ن$$



$$س ن \times س ن = ج د - ج ن - ج د$$

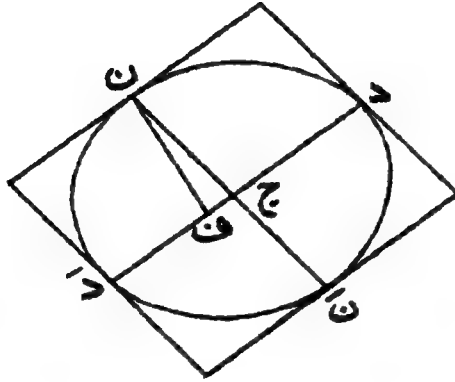
$$= ج د - ج ن - ج د$$

$$= ج د - ج ن$$

(دفعہ ۱۵۲ سے)

۱۵۳۔ اگر ایک قطع ناقص پر ن کوئی نقطہ ہو اور ن پر

نتیجہ صریح۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو مزدوج قطروں کے ایک زوج کے بیروں پر ماس کے پچھنے سے بنتا ہے مستقل اور $۲ج \times ب$ کے مساوی ہوتا ہے۔



کیونکہ رقبہ $۲ج \times متوازی الاضلاع ن د$ کا رقبہ
 $۲ن ف \times ج د = ۲ج \times ب$

دائرہ انحناء

۱۵۴۔ مسئلہ۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر کواثرہ انحناء کا وہ وتر جو قطع ناقص کے مرکز میں سے گزرتا ہے

$$\frac{۲ج د}{ج ن}$$

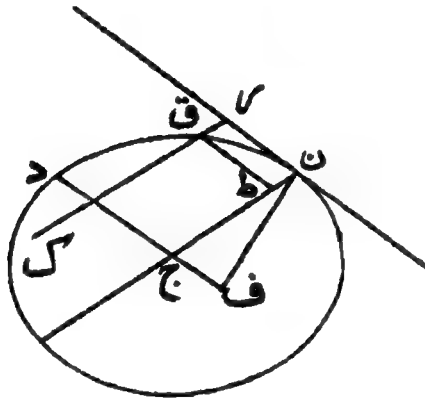
کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قی قطع ناقص پر ن سے قریب ایک نقطہ ہے

اور قطر $ج ن$ کا معین $ق$ ط ہے۔
 اس دائرہ کا تصور کرو جو قطع ناقص کو $ن$ پر مس کرتا ہے اور $ق$ پر
 قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا وتر $ق ک$ ، $ج ن$ کے
 متوازی ہے۔ فرض کرو کہ وتر $ق ک$ ، $ن$ پر $ک$ ماس سے ہر ملتا ہے۔
 اب دائرہ سے

(159)

$$\begin{aligned} \text{مس ق} \times \text{مس ک} &= \text{مس ن}^2 \\ \text{مس ک} &= \frac{\text{مس ن}^2}{\text{مس ق}} = \frac{\text{مس ن}^2}{\text{مس ط}} = \frac{\text{مس ن}^2}{\text{مس ج} \times \text{مس د}} \quad (\text{دفعہ ۱۴}) \end{aligned}$$



پس چونکہ دائرہ انحناء کا وہ وتر جو مرکز میں سے گزرتا ہے مس ک کی
 انتہا ہے جبکہ $ق$ ، $ن$ سے قریب آئے اس لئے وہ

$$\begin{aligned} \text{مس ج} \times \text{مس د} &= \text{مس ن}^2 \\ \text{مس ج} \times \text{مس د} &= \text{مس ن}^2 \times \frac{\text{مس ج} \times \text{مس د}}{\text{مس ج} \times \text{مس د}} \\ \text{نتیجہ صریح} &= \text{دائرہ انحناء کا قطر} = \frac{\text{مس ج} \times \text{مس د}}{\text{مس ن}^2} \quad \text{جہاں} \end{aligned}$$

ف وہ نقطہ ہے جس پر عماد 'ج د' سے ملتا ہے۔ کیونکہ
 قطر: $\frac{ج د}{ج ن} = \text{قط}$ (عماد اور ج ن کے درمیان زاویہ)

$$ج ن : ن ف =$$

$$قط = \frac{ج د}{ج ن} = \frac{ج د}{ن ف} = \frac{ج د}{(ج \times ج)}$$



(160)

مثالیں

۱۔ اس باب میں استعمال کی ہوئی ترتیم کے مطابق ثابت کرو کہ

$$ج : مس : ج = ۷ : ج : ج = ۱$$

۲۔ اگر ایک قطع ناقص کا نیم وتر خاص $مس$ ہو تو $مس : ج =$
 $ز : مس = ۷$ ۔ اس لئے ثابت کرو کہ

$$مس : ج = \frac{ب : ج}{ج}$$

وتر خاص کا طول اس نتیجہ (دیکھو صفحات ۱۱۶، ۱۱۷) کے استعمال سے بھی معلوم کرو کہ دو ماسکی وتروں کے طول ان قطروں کے مربعوں کی نسبت میں ہوتے ہیں جو وتروں کے متوازی ہیں۔

۳۔ اگر ایک قطع ناقص کے ماسکوں سے $ن$ پر کے ماس پر عمودوں کے پائمن ماسے ہوں اور $ن$ کا معین $ن$ ل ہو تو ثابت کرو کہ ماسے کو حائط کر نیوالا دائرہ قطع ناقص کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۴۔ اگر ایک قطع ناقص پر جس کے ماسکے $مس$ اور $مس$ ہیں کوئی نقطہ $ن$ ہو تو $مس : ن$ کو حائط کرنے والا دائرہ محور اصغر کو ان نقطوں پر قطع کریگا جہاں $ن$ پر کے ماس اور عماد اس سے ملتے ہیں۔

۵۔ اگر دو دائرے داخل ماس کریں تو ان دونوں کو مس کرنے والے دائروں کے مرکوزوں کا طریق ایک قطع ناقص ہے جس کے ماسکے $دے$ ہوں۔
 دائروں کے مرکوز ہیں۔

۶۔ اگر ایک قطع ناقص کے نقطہ $ن$ پر کا ماس محور اعظم سے $ت$ پر ملے اور $ل$ گ زیر عماد ہو تو

$$ج : ت : ل = ب : ج$$

۷۔ اگر ایک قطع ناقص کے کسی نقطہ N کا مسین N لی ہو اور اگر N پر کے ماس پر ماسکوں سے عمودوں کے پائین MA ، MA ہوں تو N لی زاویہ MA کی تقصیف کریگا۔

۸۔ اگر ایک قطع ناقص کے نقطہ N پر کا عماد محور اصغر سے g پر ملے اور N پر کا ماس RA اس پر کے ماس سے $ط$ پر ملے تو ثابت کرو کہ $MS : g = N : ط$ ۔

۹۔ اگر N پر کا عماد محور اعظم سے g پر ملے تو ماسکوں سے N پر کے ماس پر عمودوں کے درمیان اوسط موسیقی N گ ہوگا۔

۱۰۔ اگر ایک قطع ناقص ایک مثلث کے اندر بنایا جائے اور اس کا ایک ماسکہ مثلث کے مرکز عمودی پر ہو تو دوسرا ماسکہ حلقہ مرکز پر ہوگا۔

۱۱۔ اگر ایک قطع ناقص دو علی القوام خطوط مستقیم کے درمیان پھسلے تو اس کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔ (161)

۱۲۔ ایک قطع ناقص کے ایک ماسکہ میں سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو قطع ناقص کے ماسوں سے ایک مستقل زاویہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کا طریق جن پر وہ ماسوں سے ملتے ہیں ایک دائرہ ہے۔

۱۳۔ ایک متغیر مثلث کے RA ایک ثابت قطع ناقص کے ماسکہ اور اس پر کا کوئی نقطہ ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے اندرونی مرکز کا طریق ایک قطع ناقص ہے۔

۱۴۔ ایک قطع ناقص کے گرد ایک ذرا بے الاضلاع کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مقابل کے اضلاع کسی ایک ماسکہ پر یکساں زاوے بناتے ہیں۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ ایک قطع ناقص کے ماسکہ اور وہ نقطے جن پر قطع ناقص کا کوئی ماس RA اسوں پر کے ماسوں سے ملتا ہے ہم دائری ہوتے ہیں۔

۱۶۔ اگر ایک قطع ناقص کا ایک نیم قطر g قی ہو جو اس وتر کا مزدوج ہے جو منحنی کے ایک نقطہ N پر کا عماد ہے تو ثابت کرو کہ g قی پر کے عماد مزدوج ہے۔

۱۷۔ اگر ایک قطع ناقص پر جس کے ماسکہ MS اور MS ہیں اور MS کا

ایک راس ۱ ہے ن کوئی نقطہ ہو تو زاویوں ن میں ۱ ن میں ۱ کے نصف ن پر کے ماس پر ملینگے۔

۱۸۔ ایک قطع ناقص میں جس کے ماسے میں اور میں ہیں اور جگا مرکز ج ہے گ ل ج ن پر عمود کھینچا گیا ہے اور ج م میں ن کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ن گ سے م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث ج ل م ج م ن متساویہ ہیں۔

۱۹۔ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک ناقص کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے۔ قطع ناقص پر کوئی نقطہ ق ہے۔ اگر ق سے دائرہ کا ایک ماس ق ت ہو اور ق ل مشترک وتر پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ

$$ق ت = ز \times ق ل$$

۲۰۔ اگر ایک قطع مکانی کا ماسکہ ایک قطع ناقص کے ایک ماسکہ پر ملے اور قطع مکانی اس کے محور اصغر کو مس کرے تو قطع ناقص اور قطع مکانی کے ایک مشترک ماس کے محاذی ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بیگا۔

۲۱۔ بتاؤ کہ ایک قطع ناقص کے محوروں کی مقدار اور انکا محل کس طرح متعین کئے جاسکتے ہیں جبکہ دو مزدوج قطر مقدار اور محل میں دئے گئے ہوں۔

۲۲۔ ایک قطع ناقص بناؤ جبکہ اس کے مرکز کا محل اور ایک خود مزدوج مثلث دیا گیا ہو۔

۲۳۔ اگر ایک قطع ناقص پر جس کے راس ۱ اور ۱ ہیں ن کوئی نقطہ ہو اور ۱ ن، ۱ ن ایک مرتب سے نقطوں ع اور ف پر ملیں تو ع ف کے محاذی نظیری ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بیگا۔

۲۴۔ مثال ۳۳ سے یہ خاصیت اخذ کرو کہ ن ل: ۱ ل: ۱ ل: ۱ مستقل ہوتا ہے۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ وہ درجہ ایک قطع ناقص پر کے کسی نقطہ کو ایک قطر کے سروں سے ملاتے ہیں مزدوج قطروں کے ایک زوج کے متوازی ہوتے ہیں۔
[ایسے دو وتروں کو کھیلی وتر کہتے ہیں]

۲۶۔ اگر ایک دائرہ ایک ثابت قطع ناقص کو ن پر مس کرے اور اس کو ایک طر ق ق کے سرول پر قطع کرے تو ن ق اور ن ق کی سمتیں متقل ہوگی۔

۲۷۔ قطعات ناقص کے ایک نظام میں تمام ناقص ایک مشترک ثابت ماسک رکھتے ہیں اور دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتے ہیں۔ ثابت کردہ ان کے مرتب دائرے ہم محور ہیں۔

۲۸۔ ایک قطع ناقص کے ماسک سے ایک ماسک پر عمود سے ملے اور اس سے عمودہ میں ایک نقطہ گ ایسا ہے کہ اس سے ماسک = ثابت کرو کہ گ سے مرتب دائرہ کے ماسک کا مربع سے ماسک کے مربع کا دو چند ہے۔

۲۹۔ ایک قطع ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک کے ایک سرے پر کا دائرہ انحاء قطع ناقص سے گزرنے والی قطر کے سرے پر ملتا ہے۔

۳۰۔ اگر ایک قطع ناقص کے نقطہ ن کا معین ن ل ہو تو سمت

$$ن ل \text{ میں در انحاء } = \frac{ج ب}{ج د} \times ن ل$$

۳۱۔ اگر ایک قطع ناقص کے ماسک سے اور سے ہوں اور محور سے کا ایک سراب ہو تو دائرہ سے سے ب، محور اصغر کو ب کے مرکز انحاء پر قطع کریگا۔

۳۲۔ ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا دائرہ انحاء ماسک سے سے گذرتا ہے اور سے ع، ن کے ماسک کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ ن میں سے گذرینوالے قطر سے ع پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ اس قطر کو نسبت ۱:۳ میں تقسیم کرتا ہے۔

۳۳۔ ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا دائرہ انحاء منحنی کو گزرنے پر قطع کرتا ہے اور سے ع، ن پر کا ماسک دو سرے مشترک ماسک سے و پر ملتا ہے اور یہ دو سرے مشترک ماسک قطع ناقص اور دائرہ کو ع اور ف پر مس کرتا ہے۔

ثابت کر دے (ت و ؛ ع ف) = ۱۔
 ۳۴۔ ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا ماس مساوی مزدوجوں
 ق اور ق' پر ملتا ہے۔ ثابت کر دے کہ ج ن، مثلث ق ج ق' کا
 شہد وسطی ہے۔



نیزہواں باب

قطع زائد

(168)

۱۵۵۔ ہم دفعات ۱۰۰ اور ۱۰۱ میں دیکھ چکے ہیں کہ قطع زائد ایک ایسے دائرہ کا ظل ہے جو خط منعدم سے منقطع ہوتا ہے۔ نیز یہ کہ قطع زائد میں تشاکل کے دو محور ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوتے ہیں اور جن میں سے ایک جسے قاطع محور کہتے ہیں منحنی ہے راسوں (۱) اور (۲) پر ملتا ہے اور دوسرا جسے فردوج محور کہتے ہیں منحنی سے نہیں ملتا۔ یہ دو محور منحنی کے مرکز ج پر ملتے ہیں اور ج سے منحنی کے دو تماس ہوتے ہیں جن کے نقاط تماس لاتنا ہی پر ہوتے ہیں۔ ان تماسوں کو متقارب کہا جاتا ہے اور وہ محوروں کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

منحنی دو پاسکے میں اور میں رکھتا ہے جو قاطع محور کے خط پر واقع ہوتے ہیں اور اگر ان سے متقاربوں پر عمود کھینچ جائیں تو ان عمودوں پائین اس دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جو (۱) کو قطر مانکر کھینچا گیا ہو۔ مرتب جو پاسکوں کے قطبی خط ہیں قاطع محور پر علی القوائم ہوتے ہیں اور متذکرہ بالا عمودوں کے پائین میں سے گزرتے ہیں۔ اگر کا اور کا وہ نقطے ہوں جن پر مرتب قاطع محور کو قطع کرتے ہیں اور منحنی کا مرکز ج ہو تو

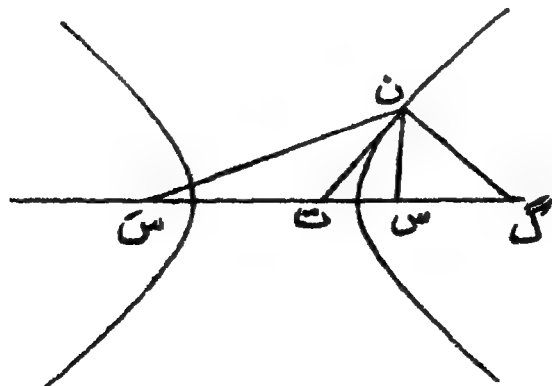
ایک شاخ پر کے تقطوں کے لئے سن - سن = ۱۱
اور دوسری شاخ پر کے تقطوں کے لئے سن - سن = ۱۱۔
نتیجہ صریح ۔ دوہم اسکی قطعات زائد متقاطع نہیں ہو سکتے۔

مناس اور عماد

۱۵۸۔ مسئلہ۔ قطع زائد کے کسی نقطہ پر کے محاس اور عماد
اس نقطہ کے ماسکی نصف قطروں کے داخلی اور خارجی زاویوں
علی الترتیب تضعیف کرتے ہیں۔

نہ پر کے ماس اور عماد قاطع محور سے ت اور گ پر سے
اب دفعہ ۱۱ کی رو سے

س گ = ز x س ن ' س گ = ز x س ن
 س گ : س ن = س گ : س ن
 ن گ ' س ن س کے خارجی زاویہ کا نصف ہے اور اسے
 ن ت کو جو ن گ پر عمود ہے داخلی زاویہ کی تقصیف کرنا چاہئے۔



نتیجہ صریح ۱۔ ج گ x ج ت = ج س کیونکہ (س س ت گ) = ۱۔
نتیجہ صریح ۲۔ اگر ایک قطع زائد اور طع ناقص ہم ماسکی ہوں تو ان کے تقاطع
تقاطع پران کے ماس علی التوائم ہوتے ہیں یعنی بالفاظ دیگر یہ منحنی علی التوائم
تقاطع ہوتے ہیں۔

۱۵۹۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ماسکوں سے اس کے کسی
نقطہ ن پر کے ماس پر عمود س ما اور س ما ہوں تو ما
اور ما اس دائرہ پر واقع ہونگے جو ا ا پر اے قطر مائیکر کھینچا گیا ہو
اور س ما x س ما مستقل ہوگا۔ اس دائرہ کو ادا دی دائرہ
کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ س ما س ن سے گ پر ملتا ہے۔
اب چونکہ س ن ما = گ ن ما (دفعہ ۱۵۸)
اور س ما ن = گ ن ما
ن ما مشترک ہے
س ن ما = گ ن ما
اور س ما = ما گ ن گ = س ن
نیز چونکہ س گ اور س س کے وسطی نقطے ما اور ج ہیں
اس لئے ج ما س گ کے متوازی ہے اور
ج ما = س گ = ۱/۲ (س ن - گ ن)

= ۱/۲ (س ن - س ن) = ۱/۲ (ا ج ا)

پس ما (اور اسی طرح ما) ا ا پر کے دائرہ پر واقع ہے۔
اگر س ما دائرہ سے گمرے پر لے تو چونکہ ما ما سے ایک

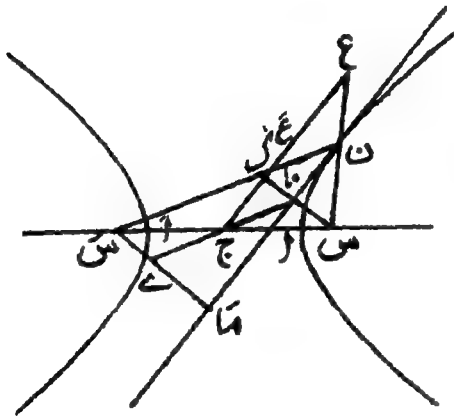
زاویہ قائمہ ہے اس لئے ماے ایک قطر ہونا چاہئے اور ج میں سے گزرنا چاہئے۔

نیز Δ س ج ما \equiv س ج ع اور س ع = س ما

س ما \times س ما = س ع \times س ما = س ا \times س ا

$$ج س = ج ا$$

جو مستقل ہے۔



نتیجہ صریح ۱۔ وہ قطر جو ن پر کے ماس کے متوازی ہے، س ن

اور س ن سے ایسے نقاط ع اور ع پر ملیگا کہ ن ع = ع ج ا

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ایک ثابت نقطہ س سے ایک خط پر عمود

کھینچا جائے اور اس عمود کا پائین ایک ثابت دائرہ پر واقع ہو

تو اس خط کا لٹاف ایک قطع زائد ہوتا ہے جس کا ایک ماس کہ

س ہے بشرطیکہ نقطہ س اس دائرہ کے باہر واقع ہو۔

نتیجہ صریح ۳۔ اگر دو ثابت نقطوں سے ایک خط پر ڈالے ہوئے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل ہو تو اس خط کا لفاف ایک قطع زائد ہوتا ہے جس کے ماسکے یہ ثابت نقطے ہیں شبرطیکہ یہ نقطے خط کی مخالف سمتوں میں ہوں۔
دفعہ ۱۴۱ کے نتائج صریح ۲ اور ۳ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۱۶۰۔ مزدوج محور کا طول۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ قطع زائد کا مزدوج محور مخفی سے نہیں ملتا، اس لئے ہم نہیں کہہ سکتے کہ وہ انہی معنوں میں طول رکھتا ہے جن معنوں میں قطع ناقص کا محور اصغر اپنے طول کے لئے وہ حصہ رکھتا ہے جو مخفی سے منقطع ہوتا ہے۔ جیسا کہ آئندہ چلکر معلوم ہوگا سہولت اس میں ہے کہ مزدوج محور پر طول ب ب ایسا ناپ لیا جائے کہ ب اور ب' ج سے مساوی (167) فاصلہ پر ہوں اور

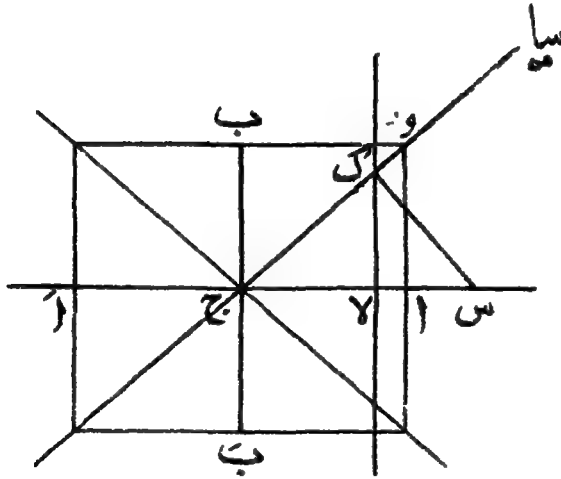
ب ج = ج س۔ ج (= اس) × اس
اس سے اس ما × س ما (دیکھو مسئلہ مابقی) ب ج کے مساوی ہوگا (دفعہ ۱۴۱ کے ساتھ مقابلہ کرو)۔

طول ب ب کو ہم یہ نظر سہولت مزدوج محور کا طول کہیں گے لیکن یہ صاف طور پر ذہن نشین رہے کہ ب ب، قطع زائد کا کوئی قطری طول نہیں ہے کیونکہ ب اور ب' مخفی پر واقع نہیں ہیں۔

۱۶۱۔ یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوگا کہ اگر ایک مستطیل کھینچا جائے جس کے مقابل کے ضلعوں کا ایک زوج () اور () پر کے ماسوں ہو اور جس کے وتر متقاربولوں پر ہوں تو مزدوج محور کا وہ حصہ جو اس مستطیل میں منقطع ہوتا ہے طول ب ب کا ہوگا جسکو ہم نے حسب مباحث بالا

نشان زد کیا ہے۔
 کیونکہ اگر د پر کا ماس متقارب ج مسا سے و پر ملے اور اس
 کے جواب میں جو مرتب ہے وہ ج مسا سے گ پر ملے تو چونکہ ج گ سے
 ایک قائمہ زاویہ ہے اور ج گ = ج (دفعہ ۱۰۱) اس لئے
 ۵ ج گ سے ۵ ج ۱ و

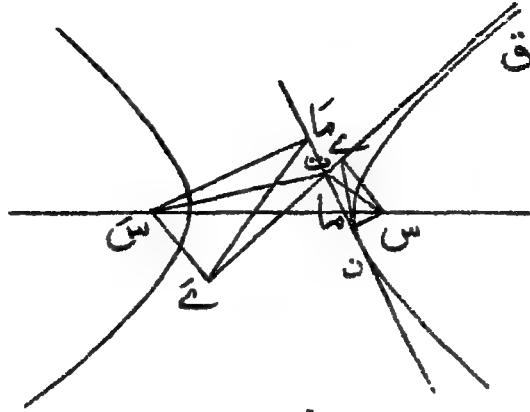
پس ۱ و = س گ = ج س = ج گ = ج س = ج ۱



ماسوں کا زوج

(168)

۱۶۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک نقطہ سے قطع زائد کے دو ماس
 کھینچے جائیں تو یہ ماس اس نقطہ کے ماسکی فاصلوں کے ساتھ
 مساوی یا یکجہلی زاوے بناتے ہیں۔

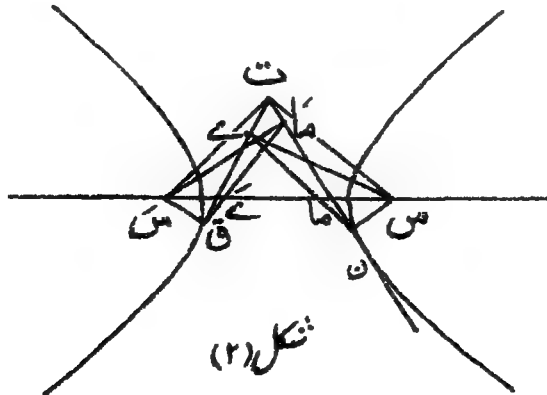


شکل (۱)

فرض کرو کہ ماس ت ن، ت ق ہیں، یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ زاوے س ت ن اور س ت ق مساوی یا یکساں ہیں۔
ت ن پر عمود س ما، س ما اور ت ق پر عمود س ے
س ے کھینچو۔

اب $س ما \times س ما = ج ج = س ے \times س ے$
س ما : س ے = س ے : س ما

نیز $د ماس ے = د ے س ما$ کیونکہ زاوے شکل (۱) میں مساوی زاویوں کے ت ما اور ے ت ما کے مکملے ہیں اور شکل (۲) میں ان میں سے ہر ایک زاویہ زاویہ مات ے کے مساوی



شکل (۲)

(169) ہے کیونکہ س سے ت ما اور س سے مکت سے دائری ہیں۔

پس مثلثات س ما سے اور س سے م متساویہ ہیں اور
 $\Delta س ت ن = \Delta س سے ما = \Delta س مائے = \Delta س ت سے$
 $= \Delta س ت ق$ کا مکملہ شکل (۱) میں

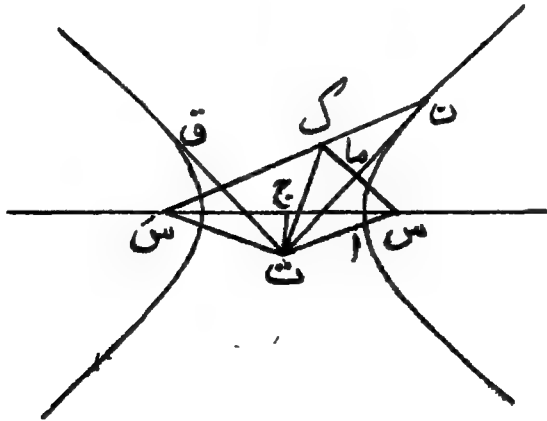
لیکن شکل (۲) میں $\Delta س ت ن = \Delta س ت ق$
 اس طرح کسی بیرونی نقطہ سے کھینچے ہوئے دو مماس اس نقطہ
 کے ماسکی فاصلوں کے ساتھ مساوی زاوے یا یکجہلی زاوے بناتے ہیں
 بموجب اس کے کہ مماس مختلف شاخوں سے یا ایک ہی شاخ سے
 متعلق ہوں۔

۱۶۳۔ مرتب دائرہ۔

مسئلہ۔ ان نقطوں کا طریق جن سے قطع زائد کے دو مماس

علی القوائم ہوں ایک دائرہ ہوتا ہے جسے قطع زائد کا مرتب دائرہ کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ت ن اور ت ق علی القوائم ہیں۔
 ت ن پر عمود س ما کھینچو اور فرض کرو کہ وہ س ن سے ک پر ملتا ہے۔



$$\text{ج ص}^1 = \text{ج مس}^1 = \text{ج ا}^1 + \text{ج ب}^1$$

سے معلوم ہوتے ہیں۔

نیز خروج المرکز ز = ج ص : ج ا اور مرتب چونکہ وہ خطوط ہیں جو ا اور پر عمود ہیں اور اس پر کے ایسے نقطوں کا اور کا میں سے گذرتے ہیں کہ

$$\text{ج ا} : \text{ج لا} = \text{ز} = \text{ج ا} : \text{ج لا}$$

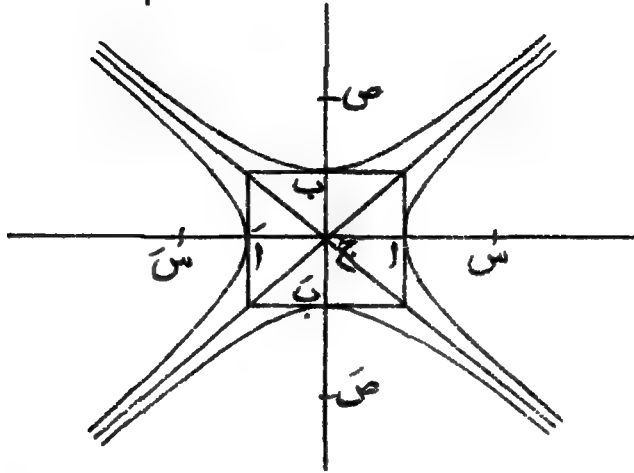
اس لئے وہ بھی معلوم ہو جاتے ہیں۔

۱۶۵۔ اب ہم ایک نیا قطع زائد لیتے ہیں جس کے قاطع اور مزدوج محور علی الترتیب ابتدائی قطع زائد کے مزدوج اور قاطع محور ہیں۔ اس نئے قطع زائد کے متقارب صر کا وہی ہونگے جو ابتدائی قطع زائد کے ہیں (دفعہ ۱۶۱) اور یہ نیا قطع زائد اس فضاء میں واقع ہوگا جو ان متقاربوں کے درمیان ان کے خارجی زاوے سے محدود ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اس نئے قطع زائد کو ابتدائی قطع زائد کے لحاظ سے مزدوج قطع زائد کہتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ابتدائی قطع زائد اس نئے قطع زائد کا مزدوج قطع زائد ہے۔ قطع زائد اور اس کا مزدوج دو جدا جدا منحنی ہیں ہر ایک اپنے اپنے ماسکے اور مرتب رکھا ہے اور بالعموم ان کے خروج المرکز بھی مختلف ہوتے ہیں ابتدائی قطع زائد کے ماسکے ص اور مس ا کے خط پروج ہیں اور یہ نقطے ایسے ہیں کہ ج ص = ج ا + ج ب اور اس کا خروج المرکز ج ص : ج ا ہے۔ مزدوج قطع زائد کے ماسکے ص اور ص ب کے خط پروج ہیں اور یہ نقطے ایسے ہیں کہ ج ص = ج ا + ج ب اس طرح ج ص = ج ص لیکن خروج المرکز ج ص : ج ا ہے جو ابتدائی قطع زائد کے خروج المرکز کے مساوی ہوگا اگر

$$\text{ج ا} = \text{ج ب}$$

اس خاص صورت میں متقارب ایک مربع کے وتر ہوتے ہیں (دفعہ ۱۶۱) اور اس لئے وہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہوتے ہیں۔



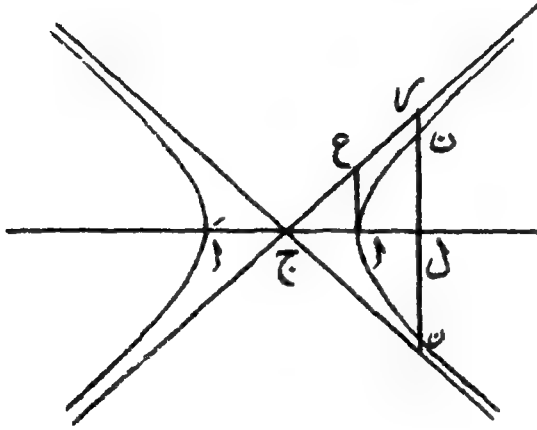
جب متقارب ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں تو قطع زائد کو قائم کہا جاتا ہے۔ آئندہ باب میں ہم قائم قطع زائد کی استیلازی خاصیتوں کی تحقیقات کریں گے۔ ہم دیکھیں گے کہ مزدوج قطع زائد کا ایک بہت ہی مفید متعلقہ ہے اور آئندہ اسکا استعمال کثرت سے کیا جائیگا۔

مقاربہ خواص

۱۶۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک مقاربہ کے کوئی نقطہ s ہو اور s ل جو قاطع محور پر عمود ہے قطع زائد سے n اور n پر ملے تو $s n \times s n = b^2$ جہاں b فرض کرو کہ b پیکاس اس متقارب سے جس پر s واقع ہے

ع پر ملتا ہے۔

اب چونکہ مسا وہ نقطہ تماس ہے جہاں متقارب منحنی کو لاساہی
پرس کرتا ہے اس لئے نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے
مرات \times مران : مران مسا = ع : ا : ع مسا
: مران \times مران = ع : ا : ع = ب ج



اسکو شکل ذیل میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{مران} - \text{ن ل} = \text{ب ج}$$

ابھی یہ معلوم ہوگا کہ یہ مسئلہ ایک زیادہ عام مسئلہ کی صرف ایک
خاص صورت ہے۔

۱۶۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن کا معین
قاطع محور پر ن ل ہو تو

$$\text{ن ل} : \text{ا ل} \times \text{ا ل} = \text{ب ج} : \text{ا ج}$$

دفعہ ۱۶۶ کی شکل استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ر ل - ن ل = ب ج

ن ل = ر ل - ب ج

ر ل : ب ج = ر ل : ع ا

لیکن

ج ل : ج ا =

ر ل - ب ج : ب ج = ج ل - ج ا : ج ا

ن ل : ب ج = ا ل × ا ل : ج ا

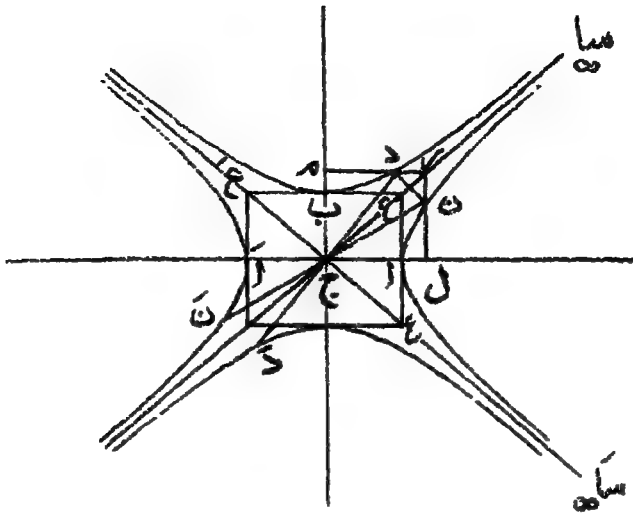
ن ل : ا ل × ا ل = ب ج : ا ج

ن ل : ج ل - ج ا = ب ج : ا ج

(173)

یہ مسئلہ بھی ایک زیادہ عام مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے۔
اس خاصیت کا مقابلہ قطع ناقص کی متناظر خاصیت کے ساتھ (صفحہ ۱۴۸)
کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ قطع زائد کے لئے اس خاصیت کا اُسی طرح ثابت کرنا
ناممکن تھا جس طرح ہم نے قطع ناقص کے لئے کیا تھا، اس کی وجہ یہ ہے کہ
مزدوج محور قطع زائد سے نہیں ملتا۔

۱۶۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب میں
کوئی نقطہ ر ہو اور اس نقطہ سے قاطع اور مزدوج محوروں پر
عمود سان ل اور ر د م کھینچے جائیں جو قطع زائد اور اس کے
مزدوج کو علی الترتیب ن اور د پر قطع کریں تو ن د، دوسرے
مقارب کے متوازی ہو گا اور ج ن اور ج د، قطع زائد اور
اس کے مزدوج دونوں کیلئے مزدوج خطوط ہوں گے۔



فرض کرو کہ قطع زائد اور اس کے متقاربوں کے نقاط تماس لاتنا ہی پر مسا
اور مسا ہیں۔
ہم اولاً دیکھتے ہیں کہ 'ا ب' 'ج س' کے متوازی ہے۔
کیونکہ وہ خطوط یکہیچے سے جو (ا اور ب میں سے گزرتے ہیں اور محور
پر عمود ہیں اور متقاربوں سے نقطوں 'ع' 'ع' پر ملتے ہیں جیسا کہ
نشان میں دکھایا گیا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(174)

$$ع : ب : ب : ع = ا : ا : ع : ع$$

نیز م ل 'ا ب' کے متوازی ہے، کیونکہ

$$ج : ا : ج : ب = ج : ا : ع : ا = ج : ل : ج : م$$

$$ج : ل : ج : م =$$

$$ج : ا : ج : ل = ج : ب : ج : م$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ا ب : م ل - ن ل = ب ج \\ اور : م م - د م = ا ج \end{array} \right. \text{ دفعہ ۱۶۶}$$

۱۶۸۔ ر ل - ن ل : ر م - د م = ج م : ج ل

= ر ل : ر م

۱۶۹۔ ر ل : ر م = ن ل : د م

اس لئے ن د، م ل کے متوازی ہے اور اس لئے ج م سا کے متوازی ہے۔

اس لئے ج م سا، ن د کی تغیف نقطہ ت (نض کرن) پر کریگا۔

اب د ن، ج م سا سے م سا پر ملیگا اور

(د ن، ت م سا) = ا

۱۷۰۔ ج ن اور ج د اس درپچ سے متعلق ہونگے جس کے دوہرے

خطوط ج م سا اور ج م سا ہیں۔

لیکن چونکہ ج م سا اور ج م سا، ج سے قطع زائد اور اس کے

مزدوج کے ماس ہیں اس لئے وہ اس مزدوج پنسل کے دوہرے خطوط

ہیں جو ج م سے گزرنے والے مزدوج خطوں کے مزدوجوں سے بنتی ہے۔

۱۷۱۔ ج ن اور ج د، قطع زائد اور اس کے مزدوج دونوں فیلتے

مزدوج خطوط ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ ن پر قطع زائد کا ماس، ج د کے

متوازی ہے اور نقطہ د پر مزدوج قطع زائد کا ماس، ج ن کے متوازی ہے۔

۱۶۹۔ مزدوج قطع۔

اگر خطوط ن ج اور د ج (شکل دفعہ ۱۶۸) قطع زائد اور اس کے

مزدوج سے مکرر نقطوں ن اور د پر ملیں تو ن ج ن اور د ج د کو

دونوں قطعات زائد کے لئے مزدوج قطر کہا جاتا ہے۔ لیکن یہ صاف طور پر

فہم نشین رہے کہ ن ج ن، ابتدائی قطع زائد کا ایک قطر ہے اور د ج د

(175)

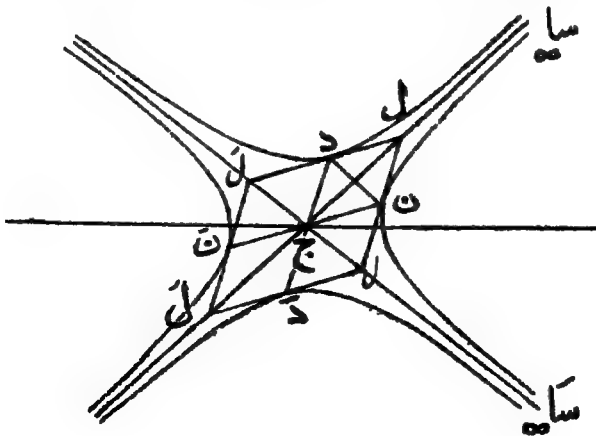
اس کا قطر نہیں ہے بلکہ وہ مزدوج قطع زائد کا قطر ہے۔
ہم نے جو یہاں مزدوج قطر کہا ہے تو اس کے یہ معنی ہیں کہ نہیں
ایک قطع زائد کا قطر ہے اور دوسرا مزدوج قطع زائد کا۔

خط د ج د بھی ابتدائی قطع زائد کا ایک قطران معنواں میں ہو سکتا
ہے کہ مرکز میں سے گزرنے والا ایک خط ہے اور وہ متوازی و تہوں کے
ایک نظام کی تصنیف کر نیکا لیکن وہ اس لحاظ سے قطر نہیں ہے کہ وہ ایک
ایسے طول کو تغییر کرتا ہے جو اس خط پر منحنی سے منقطع ہوتا ہے کیونکہ د اور د
قطع زائد پر واقع نہیں ہیں۔ د ج د قطع زائد سے حقیقی نقطوں پر نہیں
ملتا اگرچہ بلاشبہ وہ منحنی سے خیالی نقطوں پر یعنی ایسے نقطوں پر ملتا ہے
جنکے محدودوں میں خیالی مقدار ۱-۱ شامل ہوتی ہے، وہ طالب علم جو
علم ہندسہ تحلیلی سے واقف ہیں ایسے خیالی نقطوں کو خوب جانتے ہو گئے۔

۱۰۰۔ مسئلہ۔ مزدوج قطروں کے ایکٹ ج کے سروں پر کے ماس ایک

متوازی الاضلاع بناتے ہیں جسکے وتر متقاربوں پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ن ج ن اور د ج د سب شکل مزدوج قطر ہیں۔
ہم قبل ازیں دفعہ ۱۶۸ میں ثابت کر چکے ہیں کہ ن د کی تصنیف ج مسا سے ہوتی ہے



ن اور د پر کے ماس علی الترتیب ج د اور ج ن کے متوازی
یہ ماس 'ج ن اور ج د کے ساتھ مگر ایک متوازی الاضلاع
بناتے ہیں جس کا ایک وتر ج مسا ہے۔
اسی طرح ن اور د پر کے ماس ج مسا پر ملتے ہیں اور ن د
اور ن د پر کے ماس ج مسا پر ملتے ہیں۔

ج ن ' گ کا قطبی ہے۔

فرض کرو کہ ج ن ' سا سا سے ف پر ملتا ہے۔

∴ (گ ف ' سا سا) = ۱۔

∴ ج (گ ف ' سا سا) = ۱۔

∴ (گ ن ' ل ل) = ۱۔

پس قطع زائد میں ل اور ل ' نقطہ ن اور ل کے لاتنا ہی پر کے
کے نقطہ کے ساتھ موسیقی طور پر فردوج ہیں۔

∴ ل ن = ن ل

۱۷۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر
کسی نقطہ س میں سے ایک خط کھینچا جائے جو قطع زائد کی ایک
شاخ کو نقطوں ق اور ق پر قطع کرے تو س ق اور س ر ق
کا حاصل ضرب فردوج قطع زائد کے اس نیم قطر کے مساوی ہوگا
جو س ر ق ق کے متوازی ہے۔

(۱۷۷)

فرض کرو کہ ق ق کا وسطی نقطہ ط ہے۔

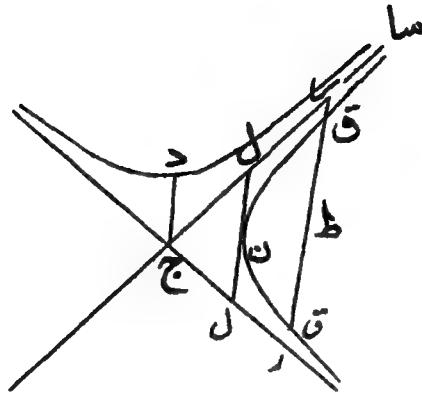
فرض کرو کہ ج ط ' قطع زائد کو ن پر قطع کرتا ہے۔

اب ن پ کا ماس ' ق ق کے متوازی ہے۔

فرض کرو کہ یہ ماس متقاربوں سے ل اور ل پر ملتا ہے۔

فرض کرو کہ ق ق کے متوازی فردوج قطع زائد کا نیم قطر

ج د ہے۔



نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

$$\text{ساق} \times \text{ساق} : \text{ساق} = \text{ل} : \text{ل سا}$$

اس لئے اگر خط ساق ق ہمیشہ ایک مستقل سمت میں کھینچا جائے تو
مستطیل ساق \times ساق، متقارب کے نقطہ ساق کے محل پر منحصر نہیں ہوگا۔
ہم اوپر کے رشتہ کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں

$$\text{ساق} - \text{ق ط} = \text{ج د}$$

اور اگر ساق ق، دوسرے متقارب سے ر پر ملے تو

$$\text{ر ط} - \text{ق ط} = \text{ج د}$$

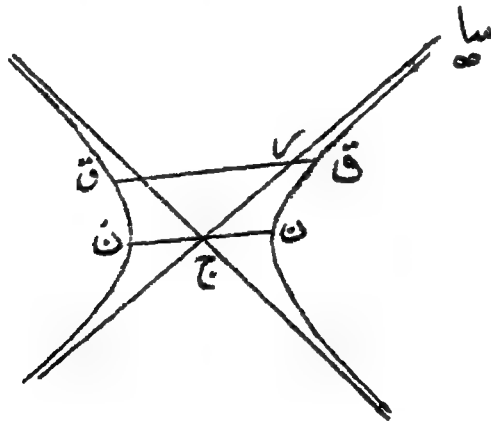
$$\text{ر ط} - \text{ق ط} = \text{ساق} - \text{ق ط}$$

$$\text{ساق} = \text{ر ط}$$

$$\text{ساق} = \text{ق} \quad \text{اور}$$

(178)

پس قطع زائد کا کوئی وتر اور متقاربوں کے درمیان اس کے خطہ منحنی
ایک ہی نقطہ وسطی رکھتے ہیں۔
اس طرح ہمیں قطع زائد کی حسب ذیل مشہور خاصیت ملتی ہے۔
اگر قطع زائد کے متقاربوں پر کے کسی دو نقطوں سے اور
کو ملائیو الاخطہ کا زبختی کو ق اور ق پر قطع کرے تو ساق = ق
۳۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر کے
کسی نقطہ سے ایک خط کھینچا جائے جو منحنی کی مخالف
شاخوں سے ق اور ق پر ملے تو ق = ساق = ج ن
جہاں ج ن ق کے متوازی قطع زائد کا نیم قطر ہے۔



کیونکہ نیوٹن کے مسئلہ سے

$$ساق \times ساق : ساق = ج ن \times ج ن : ج س$$

$$: \text{ساق} \times \text{ساق} = \text{ج}^2 \text{ ن}^2$$

$$: \text{ق} \times \text{ساق} = \text{ج}^2 \text{ ن}^2$$

دفعہ مابقی کی طرح ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ق ق اور اس کا
وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے ایک ہی وسطی نقطہ رکھتے ہیں

۴۱۔ مسئلہ۔ اگر قطر ن ج ن کا ایک معین ق ط ہو

اور ن ن کا فردون خط د ج د ہو تو

$$\text{ق ط} : \text{ن ط} \times \text{ن ط} = \text{ج د}^2 : \text{ج ن}^2$$

فرض کرو کہ ق ط 'متقارب ج سا سے سا پر ملتا ہے اور منحنی

سے گزر ق ق پر ملتا ہے۔ یہی ہے قطع زائد کا وتر ق ق 'ن ج ن کے متوازی کھینچو۔

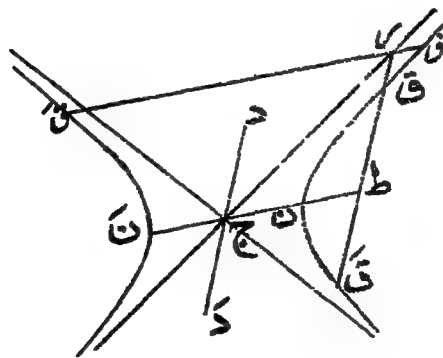
179)

اب نیوٹن کے مسئلہ کی رو سے

$$\text{ط ق} \times \text{ط ق} : \text{ط ن} \times \text{ط ن} = \text{ساق} \times \text{ساق} : \text{ساق} \times \text{ساق}$$

$$: \text{ق ط}^2 : \text{ط ن} \times \text{ط ن} = \text{ج د}^2 : \text{ج ن}^2$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ق ط}^2 : \text{ن ط} \times \text{ن ط} = \text{ج د}^2 : \text{ج ن}^2$$



یہ وہ عام مسئلہ ہے جس کی ایک مخصوص صورت دفعہ ۱۶ کا مسئلہ ہے۔ ہم اس رشتہ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$ق ط : ج ط - ج ن = ج د : ج ن$$

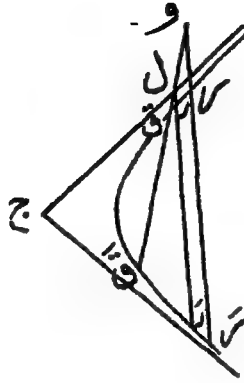
۱۷۵۔ دفعات ۱۶، ۱۷، ۱۸ سے ہم دیکھتے ہیں کہ قطع زائد کو ایک متوازی میں ایک ایسے نقطہ کا طریق سمجھا جاسکتا ہے کہ ایک ثابت خط ل سے اس کے فاصلہ کا مربع ایسے بدلتا ہے جیسے دو دوسرے ثابت خطوں ل اور ل' سے اس کے فاصلوں کا حاصل ضرب جہاں یہ موخر الذکر دو خطوط ایک دوسرے کے متوازی ہیں اور ایسے ہیں کہ نقطہ دونوں کی ایک ہی جانب واقع ہے اگر ل اور ل' ل پر عمود ہوں تو ل قطع زائد کا قاطع محور ہوگا اور ل اور ل' اس کے راسوں پر کے تماس ہونگے۔

اگر ل اور ل' ل پر عمود نہ ہوں تو ل قطع زائد کا ایک قطر ہوگا اور ل اور ل' ان نقطوں پر کے تماس ہونگے جہاں یہ قطر قطع زائد سے ملتا ہے۔
 ۱۷۶۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے وتر ق ق' مساوی ہوں

(180)

جو نقطہ و پر تقاطع ہوتے ہیں تو نسبت وق x وق' : و س x و س' ان قطروں کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوگی جو ان وتر و س کے علی الترتیب متوازی ہیں۔

فرض کرو کہ وق ق' ایک متقارب سے ل پر ملتا ہے۔
 ل میں سے ایک خط ل ر ر' و س س' کے متوازی کھینچو جو ق و س سے ر اور ر' پر ملے۔



اب نیوٹن کے مسئلہ سے

$$\text{وق} \times \text{وق} : \text{وس} \times \text{وس} = \text{ل ق} \times \text{ل ق} : \text{ل ر} \times \text{ل ر}$$

$$= \text{ق ق کے متوازی قطر کا مربع}$$

۷۷۔ یہ مسئلہ اسی طرح درست رہتا ہے اگر کسی ایک یا دو نوٹوں و تروں کے سرے قطع زائد کی مخالف شاخوں پر واقع ہوں بشرطیکہ $\text{وق} \times \text{وق}$ اور $\text{وس} \times \text{وس}$ کو صرف مثبت مقداروں کے طور پر لیا جائے کیونکہ فرض کرو کہ ق مخالف شاخوں پر اور س ، ل ایک ہی شاخ پر واقع ہیں تو چونکہ ل ق اور ل ق مخالف سمتوں میں ہیں اس لئے نیوٹن کے مسئلہ کے اطلاق کے لئے ہمیں کہنا چاہئے کہ

$$\text{ل ق} \times \text{ل ق} = - \text{ق ل} \times \text{ق ل} = \text{ق ق کے متوازی قطر کا مربع}$$

لیکن چونکہ $\text{وق} \times \text{وق} = \text{ق و} \times \text{ق و}$ اس لئے

$$\text{ق و} \times \text{ق و} : \text{وس} \times \text{وس} = \text{ق ق کے متوازی قطر کا مربع}$$

$$: \text{س ل کے متوازی قطر کا مربع}$$

(181)

۱۷۸۔ دفعہ ۱۱۶ میں مرکز اور مخروطیوں کے لئے عام صورت میں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اُسے زائد کے لئے جداگانہ طور پر ثابت کرنا شاید غیر ضروری معلوم ہو۔ لیکن ہمارا مقصد اس واقعہ کو ظاہر کرنا ہے کہ دفعہ ۱۱۶ کے قطر خود منحنی کے طوکی قطر ہونے چاہیں اور ایسے قطروں کے لئے مسئلہ محلول بالا درست ہے۔ لیکن چونکہ زائد کے قطر سب کے سب منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتے اس لئے ہم دیکھنا چاہتے تھے کہ فردوج زائد کے قطر کس طرح ان کی بجائے استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ جب کبھی وق x وق اور $وس x$ وس کی علامتیں (دیکھو ترقیم دفعہ ۱۷۶، ۱۷۷) مختلف ہوں تو اس کا یہ مطلب ہوگا کہ ق ق ق، سر سر کے متوازی قطر ایسے ہیں کہ ان میں سے صرف ایک زائد سے ملتا ہے اور دوسرا فردوج زائد سے ملتا ہے۔

۱۷۹۔ اب ہم یہ دیکھ سکتے ہیں کہ اگر فردوج زائد کا ایک قطر د ج د ہو تو وہ خیالی نقطے ضہ ضہ جہاں یہ قطر ابتدائی زائد سے ملتا ہے حسب ذیل رشتوں سے معلوم ہوتے ہیں

ج ضہ^۲ = ج ضہ^۲ = ج د ج د
اگر طالب علم ہند سے تحلیل سے واقف ہے تو وہ فوراً حسب ذیل تشریح سے مسئلہ بالا اخذ کر لیگا۔
زائد کی مساوات ہے

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{لا^۲}{ب^۲}$$

اور فردوج زائد کی مساوات ہے

$$(۲) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا^۲}{ا^۲} - \frac{لا^۲}{ب^۲}$$

اس طرح (۲) پر کے ہر نقطہ (لا، ما) کے جواب میں (ا) پر ایک نقطہ (خ لا، خ ما) ہے اور اس کے برعکس۔

پس اگر مرکز میں سے گزرنیوالا ایک خط فردوج زائد (۲) سے نقطہ (لا، ما) پر ملے تو وہ ابتدائی زائد سے (خرلا، خرما) پر لپکیگا۔

۱۸۰۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے فردوج نیم قطر جن اور ج د ہوں تو

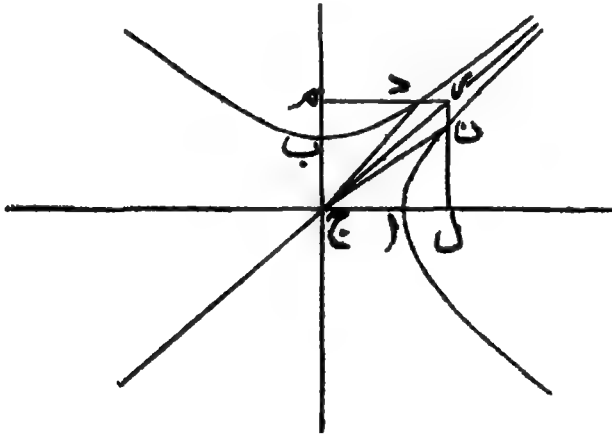
$$\text{جن} - \text{ج د} = \text{ج د} - \text{ج ا} - \text{ج ب}$$

قاطع اور فردوج محوروں پر معین ن ل اور د م نکالو۔

یہ معین ایک متقارب کے نقطہ م پر متقاطع ہونگے (دفعہ ۱۶۸) اور (182)

$$\text{جن} = \text{ج ل} + \text{ن ل} = \text{ج ا} - \text{ا ل} - \text{ن ل}$$

$$= \text{ج ا} - \text{ب ج} \quad (\text{دفعہ ۱۶۶})$$



$$\text{اور } \text{ج د} = \text{ج م} + \text{د م} = \text{ج ا} - \text{ا م} - \text{د م}$$

$$= \text{ج ا} - \text{ج د}$$

$$\text{جن} - \text{ج د} = \text{ج ا} - \text{ج ب}$$

نتیجہ صریح۔ اگر ج ۱ = ج ب یعنی اگر منحنی قائم زائد ہو تو

$$ج ن = ج د$$

۱۸۱۔ مسئلہ۔ اگر زائد پر کوئی نقطہ ن ہو تو

$$س ن \times س ن = ج د$$

جہاں ج د وہ نیم قطر ہے ج ن کا مزدون ہے۔

چونکہ س س میں کانتطہ وسطی ج ہے اس لئے

$$س ن + س ن = ج ۲ = ج ۲ + ج ۲ (دفعہ ۱۰)$$

$$: (س ن - س ن) + (س ن \times س ن) = ج ۲ + ج ۲$$

$$\text{یعنی } ج ۲ + ج ۲ + س ن \times س ن = ج ۲ + ج ۲$$

$$: س ن \times س ن = ج ن + ج ن - ج ۲$$

$$= ج ن + ج ب + ج - ج ۲$$

$$= ج ن - (ج ا - ج ب)$$

$$= ج د (دفعہ ۱۸۰)$$

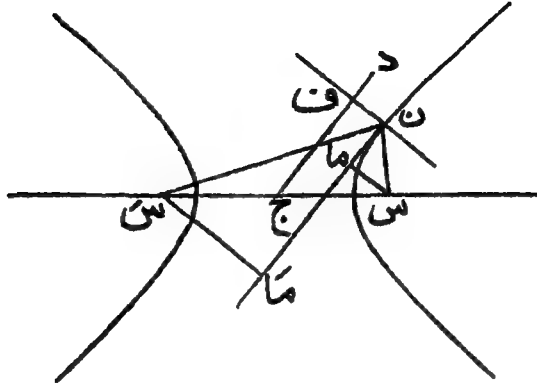
۱۸۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک زائد کے مزدون نیم قطر ج ن

اور ج د ہوں اور ن پر کا معین ج د سے ف پر لے تو

$$ن ف \times ج د = ج ا \times ج ب$$

اسکوں سے ن پر کے ماس پر عمود س ما اور س ما

نکالو۔



چونکہ مثلثات $س\ ن\ ما$ اور $س\ ن\ ف$ متشابه ہیں اسکے

$$\frac{س\ ما}{س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن} = \frac{س\ ما - س\ ن}{س\ ن - س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن}$$

$$\frac{س\ ما \times س\ ن}{س\ ن \times س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن}$$

یعنی $\frac{س\ ما}{س\ ن} = \frac{س\ ما}{س\ ن}$

$س\ ن \times ج = د \times ج$

یہ نتیجہ صریح۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو مزدون قطروں کے ایک زوج کے بیروں پر کے ماسوں سے بنتا ہے مستقل اور $(ا \times ب)$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۸۳۔ مسئلہ۔ اس مثلث کا رقبہ جو ایک زائد کے مقابلوں اور کسی کسی ماس سے بنتا ہے مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ن پر کا ماس متعارفوں سے ل اور ل پر ملتا ہے۔
 (دفعہ ۱۷۰ کی شکل استعمال کرو)
 فرض کرو کہ ن میں سے گزرنیوالے قطر کا دوسرا سر بیڑا ہے
 اور فرض کرو کہ ن کا مزدوج قطر د ج د ہے۔ اب ل اور ل
 اس متوازی الاضلاع کے راس ہیں جو ن 'ن' د 'د' پر کے ماسوں
 بنتا ہے۔ (دفعہ ۱۷۰)۔

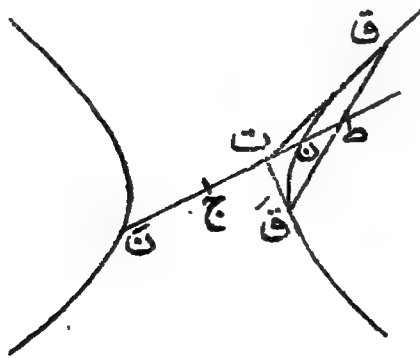
نیز اس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا ایک ربع، مثلث ج ل ل
 ہے یعنی (دفعہ ۱۸۲)

$$\Delta ج ل ل = ج (x ج ب)$$

جو مستقل ہے۔

نتیجہ صریح۔ ایک خط دو ثابت خطوں کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ کا
 ایک مثلث بنا آتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس خط کا لفاف ایک قطع زائد ہے جس کے
 متقارب دئے ہوئے دونوں ثابت خط ہیں اور متغیر خط اور اس کے
 لفاف کا نقطہ تماس اس خط کے اس حصہ کا نقطہ وسطی ہے جو ان ثابت
 خطوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے۔

۱۸۴۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کی ایک ہی شاخ پر ماس



ت ق اور ت ق ہوں اور ج ت، منحنی سے ن پر
اور ق ق سے ط پر ملے تو

ج ط x ج ت = ج ن
یہ نتیجہ فوراً قطب اور قطبی کی موسیقی خاصیت سے ماخوذ ہوتا ہے کیونکہ
(ن ن، ت ط) = ۱ -

$$\text{ج ط} \times \text{ج ت} = \text{ج ن}$$

۱۸۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک سطح زائد کی مخالف شاخوں پر

ماس ت ق اور ت ق ہوں اور ج ت، ق ق سے
ط پر اور غرض وج قطع زائد سے ن پر ملے تو

$$\text{ط ج} \times \text{ج ت} = \text{ج ن}$$

(185) اس مسئلہ کو مسئلہ ماسبق سے اخذ کیا جاسکتا ہے کیونکہ اگر ج ت،
ابتدائی قطع زائد سے خیالی نقطہ ن پر ملے تو (دفعہ ۱۷۹)

$$\text{ج ن} = - \text{ج ن}$$

$$\text{ج ط} \times \text{ج ت} = \text{ج ن} \quad (\text{دفعہ } ۱۸۴)$$

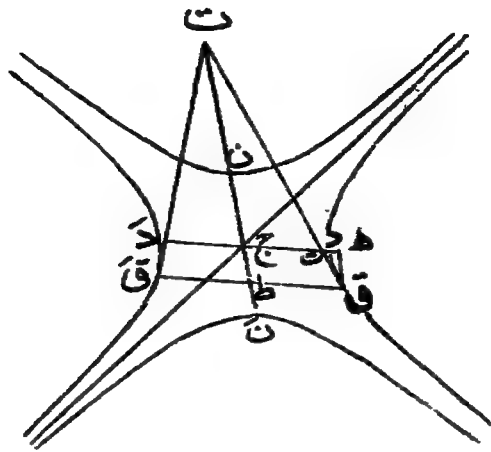
$$- \text{ج ن}$$

$$\text{ط ج} \times \text{ج ت} = \text{ج ن}$$

تاہم ہم حسب ذیل خالص سندھی ثبوت دیتے ہیں جس میں خیالی نقطوں
کو داخل نہیں کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ن ن کا فرد، قطر د ج د ہے جو زائد سے د، د پر
اور ت ق سے ت پر ملتا ہے۔

قطر د د پر معین ق ق ہے کیونکہ یعنی ق ق، ن ن کے
متوازی ہے۔



اب متشابہ مثلثات ت ه ق ' ت ج ت سے

ت ج : ه ق = ج ت : ت ه

∴ ت ج × ه ق : ه ق ق' = ج ت × ج ه : ج ه × ت ه

= ج ت × ج ه : ج ه' - ج ت × ج ه

لیکن دفعہ ۱۸۴ کی رو سے

ج ت × ج ه = ج د'

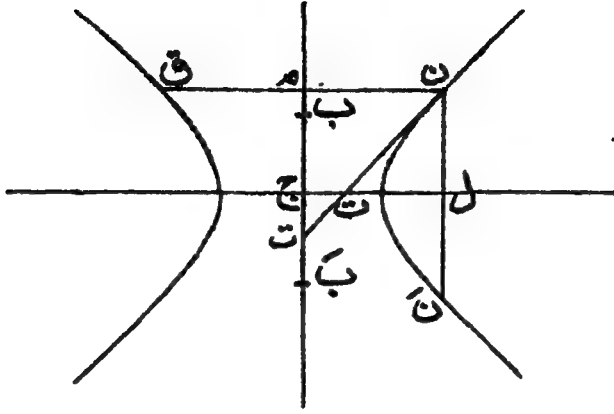
∴ ت ج × ه ق : ه ق ق' = ج د' : ج ه' - ج د' - ج د'

لیکن ج ن' : ه ق ق' = ج د' : ج ه' - ج د' (دفعہ ۱۸۴) (۱۸۴)

∴ ت ج : ه ق = ج ن'

∴ ط ج × ج ت = ج ن'

۱۸۶۔ پچھلے دو مسئلوں کی فاس صورتیں حسب ذیل ہیں۔



اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا ماس، قاطع اور خروج
محوروں سے علی الترتیب ت اور ت پر ملے اور ان محوروں
معیّن ن ل، ن م ہوں تو

$$\begin{aligned} \text{ج ت} \times \text{ج ل} &= \text{ج}^2 \\ \text{م ج} \times \text{ج ت} &= \text{ج}^2 \end{aligned}$$

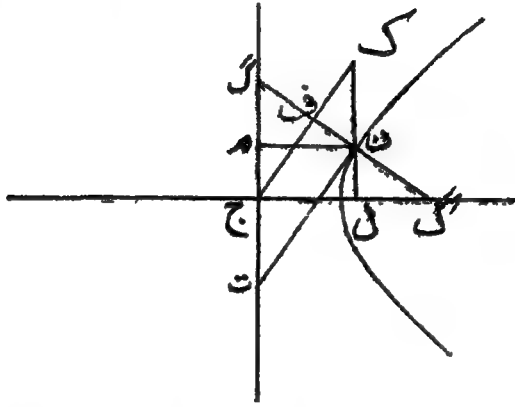
کیونکہ ت سے ماس ت ن اور ت ن ہونگے جہاں

ن وہ نقطہ ہے جہاں ن ل، زائد سے مکر ملتا ہے۔ نیز ت سے ماس
ت ن اور ت ق ہونگے جہاں ق وہ نقطہ ہے جہاں ن م زائد
سے مکر ملتا ہے۔

۱۸۷۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا عباد،
قاطع اور خروج محوروں سے علی الترتیب گ اور گ پر ملے
اور ن پر کے ماس کے متوازی قطر سے ف پر ملے تو

ف ن \times ن گ = ب ج^۱
 ن ف \times ن گ = ا ج^۲
 اس مسئلہ کا ثبوت ٹھیک اسی طرح دیا جاسکتا ہے جس طرح قطع ناقص کے لئے اس کے متناظر مسئلہ کا ثبوت دیا گیا تھا (دیکھو دفعہ ۱۴۲)۔

(187)



۱۸۸۔ مسئلہ۔ اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کاغذ قاطع محور سے گ پر ملے اور ن ل معین ہو تو
 ج گ = ز \times ج ل

اور ل گ : ج ل = ب ج : ا ج^۱
 یہ مسئلہ بھی ص دفعہ ۱۴۲ اثبات کیا جاسکتا ہے۔

واثرہ انحناء

۱۸۹۔ مسئلہ۔ ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر دائرہ انحناء کا وہ وتر جو زائد کے مرکز میں سے گزرے $\frac{ج ۲}{ج ن}$ ہوتا ہے

اور دائرہ کا قطر $\frac{2}{3} \text{ ج د}$ ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے جس طرح ناقص کچیلے ثابت کیا جا چکا ہے۔

مثالیں

- ۱۔ اگر ایک قطع زائد کے ایک ماسکے میں سے ایک خط ایک متقارب کے متوازی کھینچا جائے اور دوسرے ماسکے میں سے اس خط پر عمود میں گ نکالا جائے تو میں گ = ۱ [دفعہ ۱۵۷ استعمال کرو۔ ن کو مسا پرلو]
- ۲۔ ایک دائرہ دو ثابت دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے۔ اس دائرہ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔
- ۳۔ اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر کا ماس ایک متقارب کو ت پر قطع کرے اور میں ن اسی متقارب کو ق پر قطع کرے تو میں ق = ق ت [ت ن اور ت مسا کے محاذی میں پر سادی زاوے بنتے ہیں]
- ۴۔ ثابت کرو کہ جب قطع زائد کے فردوج قطروں کا ایک زوج مقدار اور محل میں دیا جاتا ہے تو متقارب پوری طرح معلوم ہو جاتے ہیں۔ اس لئے ثابت کرو کہ صرف دو قطعات زائد ہوتے ہیں جن میں فردوج قطروں کا ایک معلومہ زوج ہوتا ہے۔
- ۵۔ اگر دو قطعات زائد کے متقاربات ایک ہی ہوں تو ایک کا وتر جو دوسرے کو مس کرے نقطہ تماس پر متصفیع ہوگا۔
- ۶۔ اگر ایک قطع زائد کے متقاربوں ج مسا، ج مسا کے متوازی خطوط ن ہ، ن گ کھینچے جائیں جو ج مسا اور ج مسا سے ہ اور گ پڑیں تو $ن ه \times ن گ = \frac{1}{p} ج م$ [دفعہ ۱۸۳ استعمال کرو]
- ۷۔ ایک قطع زائد کے نقطہ ن پر کا ماس ایک متقارب سے ت پر ملتا ہے

اور ت ق 'دوسرے متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے جو منحنی سے ق پر ملتا ہے
ن ق ' متقارب سے ل اور م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ل م کی تثلیث
نقطوں ن اور ق پر ہوتی ہے۔

۸۔ ایک قطع زائد کے ایک متقارب کے کسی نقطہ م سے م ر ن ل ' قاطع محور پر م دیکھنا گیا ہے جو منحنی سے ن پر ملتا ہے۔ م ک ' ج م کے
علی القوا تم کھینچا گیا ہے جو قاطع محور سے ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن ک ' ن
پر عماد ہے۔ [ثابت کرو کہ ج ل = ز ' x ج ک ' دفعہ ۱۸۸]

۹۔ ثابت کرو کہ کسی مرکزدار مخروطی میں اگر ن پرکا عماد ' محوروں سے
گ اور گ پر ملے تو ن گ x ن گ = ج ' د ' جہاں ج ' د ' ج ن کا فرق
۱۰۔ اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن پرکا ماس متقاربوں سے ل اور ل
پر ملے اور ن پرکا عماد محوروں سے گ اور گ پر ملے تو ل ' ل ' گ ' گ
ایک دائرہ پر واقع ہونگے جو زائد کے مرکز میں سے گذریگا۔

۱۱۔ متقاربوں کے درمیان زائد کے کسی ماس کا مقطع بعید تر ماسکے پر اپنے عمادی
ایسا زاویہ بناتا ہے جو ان کے درمیان زاویہ کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔
۱۲۔ ایک قطع ناقص کا ایک ماسکے اور اس پر کے دو نقطے دے گئے ہیں۔
ثابت کرو کہ دوسرا ماسکے ایک قطع زائد مرسم کرتا ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مرکزدار مخروطی پر جس کے ماسکے م اور م ہیں کوئی نقطہ
ن ہو تو م ن اور م ن کو قطر ماکر کھینچے ہوئے دائرے امدادی دائرہ کو
مس کریں گے اور ان کا بنیادی محور ' ن کا معین ہوگا۔

۱۴۔ ایک مرکزدار مخروطی کے کسی نقطہ ن پر کے ماس کا قطب ' امدادی دائرہ
لحاظ سے ن کے معین پر واقع ہوگا۔

۱۵۔ اگر ایک قطع زائد کے مزدوج قطر ن ن اور د د ہوں اور منحنی پر
کوئی نقطہ ق سو تو ق ن + ق ن ' ق د + ق د ' سے بقدر ایک
مستقل مقدار کے بڑا ہوگا۔

۱۶۔ ایک قطع مکانی کے دو نقطے اور اس کے محور کی سمت دی گئی ہے۔

- ثابت کرو کہ اس کے ماسکہ کا طریق ایک قطع زائد ہے۔
- ۱۷۔ اگر ایک قطع زائد سے دو تماس کھینچے جائیں تو وہ خطوط جو متقابلوں کے ساتھ ان کے نقاط تقاطع کو ملاتے ہیں متوازی ہوں گے۔
- ۱۸۔ اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ (ن) سے ن ک، کسی متقابل کے متوازی کھینچا جائے اور ن ک، ایک مرتب سے گزریں اور نظیری ماسکہ میں ہو تو ن ک = س ن۔
- ۱۹۔ اگر ایک مرکز دار مخروطی کے نقطہ ن پر کا تماس اور عماد، محور سے ت اور گ پر ملیں اور ن ل معین ہو تو ل گ \times ج ت = ج ج۔
- ۲۰۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور اس قاعدہ اور اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس دے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک قطع زائد ہے۔
- ۲۱۔ اگر ہم ماسکی قطعات زائد کے ایک سلسلہ کے تماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تماس پر کے عماد سب کے سب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے اور نقاط تماس ایک دائرہ پر واقع ہوں گے۔
- ۲۲۔ ایک قطع مکانی کھینچا گیا ہے جو ایک قطع زائد کے صدر محوروں کو ان کے سروں میں سے ایک پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک متقابل، قطع مکانی کے محور کے متوازی ہے اور دوسرا متقابل، قطع مکانی کے ان دوتروں کے متوازی ہے جو پہلے متقابل سے متصف ہوتے ہیں۔
- ۲۳۔ اگر ایک قطع ناقص اور اس کا ہم ماسکی ایک قطع زائد، ن پر متقاطع ہوں تو زائد کے متقابل ان نقاط میں سے گزریں گے جن پر ن پر کے معین قطع ناقص کے امدادی دائرہ کو قطع کرتے ہیں۔
- ۲۴۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ کا مرکزی فاصلہ جہاں ایک قطع زائد کا تماس ایک متقابل سے ملتا ہے دوسرے متقابل سے نقطہ تماس کے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے جبکہ یہ فاصلہ قاطع محور کے متوازی لیا گیا ہو۔
- ۲۵۔ ایک قطع زائد کے تماس کران اور حقائق کھینچے گئے ہیں جہاں کران، ایک متقابل پر ہیں اور کران، دوسرے متقابل پر

ثابت کرو کہ مراکت اور سکت کو قطر مانکر کھینچے ہوئے دائرے مرتب دائرہ کے ساتھ ہم محور ہیں۔

۲۶۔ ایک قطع زائد کے ایک دے ہوئے قطر پر کسی نقطہ ن سے دو خطوط مستقیم متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو قطع زائد سے ق اور ق' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن ق ن ق' میں نسبت مستقل ہے۔

۲۷۔ ایک زائد کے دونوں متقارب اور زائد پر کا ایک نقطہ دے گئے ہیں وہ نقطے معلوم کرو جن پر ایک دیا ہوا خط تختی ملتا ہے۔

۲۸۔ اگر ایک قطع زائد کے نقطہ ن کا معین ن ل اور عماد ن گ ہو اور قطع زائد کا مرکز ج ہو اور اگر ن پر کا حماس متقاربوں کو ت اور ت' پر قطع کرے تو ج ت اور ج ت' کے مجموعہ کا نصف ج ل اور ج گ کے درمیان وسط تناسب ہوگا۔

۲۹۔ مرتب دائرہ پر کے کسی نقطہ سے کسی مخروطی کے حماس ان زادیوں کے نصف ہوں گے جو اس نقطہ میں سے گزرنیوالے مزدوج خطوں کے ہر زوج کے درمیان ہوتے ہیں۔

۳۰۔ ایک مخروطی کا ایک ماسکہ ایک حماس اور خروج المکرر دے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۳۱۔ اگر ایک مرکزدار مخروطی پر ن کوئی ایسا نقطہ ہو کہ وہ خطوط جون کو ماسکوں سے ملاتے ہیں علی القوائم ہیں تو ج = ۲ ج ب ج۔

۳۲۔ ایک قطع زائد کے محوروں کا محل اور انکی مقدار معلوم کرو جبکہ قطع زائد ایک دے ہوئے نقطہ میں سے گزرے ایک دے ہوئے خط کو ایک دے ہوئے نقطہ پر سس کرے اور ایک دیا ہوا خط اس کا متقارب ہو۔

۳۳۔ اگر ایک قطع زائد پر جس کے ماسکے میں اور میں ہیں ن کوئی نقطہ ہو تو مثلث میں ن میں کا اندرونی مرکز اس حماس پر واقع ہوگا جو قطع زائد کے ماسکوں میں سے ایک پر کھینچا گیا ہو۔

۳۴۔ ایک قطع ناقص کے دو مزدوج قطروں کو متقارب مانکر مزدوج زائد بننا

ایک زوج کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک زائد ناقص کو مس کرے تو دوسرا بھی مس کرے گا اور وہ قطر جو نقاط تماس میں سے کھینچے گئے ہوں ایک دوسرے کے مزدوج ہوں گے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ ان چار خطوں کو مس کرتا ہو کھینچا جاسکتا ہے جو ایک زائد کے ماسکوں کو زائد کی ایک ہی شاخ پر کے کسی دو نقطوں سے ملاتے ہیں۔

۳۶۔ ایک قطع زائد کے تماس کھینچے گئے ہیں اور ہر تماس کا وہ حصہ جو متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نقطہ تقسیم کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

۳۷۔ ایک قطع زائد کے ایک متقارب پر کسی نقطہ سے خط $س ر ع$ کھینچا گیا ہے جو زائد کو $پ$ پر کرتا ہے اور $ع$ میں سے خطوط $ع ت$ اور $ع ط$ متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو ایک قطر کو $ت$ اور $ط$ پر قطع کرتے ہیں $س ط$ کو ملایا گیا ہے جو زائد کو $ن$ پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $ت ن$ اور $ت ن$ زائد کو مس کرتے ہیں۔

[زائد کو ایک دائرہ میں اور $ط$ کو مرکز میں منطبل کرو]

۳۸۔ ایک قطع زائد کے مزدوج نیم قطر $ج ن$ اور $ج د$ ہیں اور $ن$ پر کا تماس ایک متقارب سے $ل$ پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $ن د$ قاطع محور سے $ف$ پر ملے تو $ل ف ن ج$ ایک قائمہ زاویہ ہے۔

۳۹۔ ایک قطع زائد پر ایک دے ہوئے نقطہ سے ایک ایسا خط مستقیم کھینچو کہ قطع زائد کے ساتھ اس کے دوسرے نقطہ تقاطع اور ایک دے ہوئے متقارب کے درمیان اس کا منقطع عم ایک دے ہوئے خط کے مساوی ہو۔ یہ مسئلہ کب ناممکن ہو جاتا ہے؟

۴۰۔ اگر دو دائروں میں $ا$ اور $ب$ پر جو ایک ہم محور نظام سے متعلق ہیں جنکا ایک انتہائی نقطہ $ل$ ہے $ن$ اور $ق$ دو ایسے نقطے ہوں کہ زاویہ $ن ل ق$ ایک قائمہ زاویہ ہے تو ثابت کرو کہ اس عمود کا پائیں جو $ل$ سے

نق پر کھینچا گیا سو ہم محور نظام کے ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے اور اس لئے ثابت کرو کہ نق کا لفاف ایک مخروطی ہے جس کا ایک ماسکہ لی پر ہے۔
 ۴۱۔ اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے ضلعوں کو ان عمودوں کے پائین پر مس کرے جو راسوں سے متقابلہ اضلاع پر کھینچے گئے ہیں تو مخروطی کا مرکز مثلث کے شبہ وسطی نقطہ پر ہونا چاہئے۔

192)

چودھواں باب

قائم زائد

۱۹۰۔ قائم زائد جیسا کہ ہم پہلے بتا چکے ہیں وہ زائد ہے جس کے متقارب علی القوائم ہوتے ہیں اور اس کے قاطع اور فردوج محور مساوی ہوتے ہیں۔ قائم زائد کا خروج مرکز = ۲۷ کیونکہ ز = ج م : ج ۱ اور ج م ۱ = ج ۱ + ج ب ۲ = ج ۲ ج ۱ اب ہم مسئلوں کا ایک سلسلہ پیش کریں گے جن سے اس منحنی کے امتیاز خواص ظاہر ہوں گے۔

۱۹۱۔ مسئلہ۔ قائم زائد میں فردوج قطر مساوی ہوتے ہیں اور اگر ایک قطرن ج ن کا معین ق ط ہو تو ق ط = ن ط x ن ط۔

کیونکہ ج ن - ج د ۱ = ج ۱ - ج ب ۱ (دفعہ ۱۸۰)

اور ق ط ۲ : ن ط x ن ط = ج د ۱ : ج ن ۱ (دفعہ ۱۷۴)

۱۹۲۔ قائم زائد کے فردوج قطر ہر متقارب کے ساتھ مساوی ہوں گے۔

مائل ہوتے ہیں۔

کیونکہ متقارب اُس درپہنچ پسل کے دوسرے خطوط ہیں جو ج میں سے گذرنے والے مزدوج خطوں کے زو جوں سے بنتی ہے۔ اور اس لئے متقارب مزدوج قطروں کے کسی زوج کے ساتھ موسیقی طور پر مزدوج ہیں۔ پس چونکہ متقارب ایک دوسرے کے علی القوا ائم ہیں اس لئے وہ ان زاویوں کے ناصف ہونے چاہئیں جو مزدوج قطروں کے ہر زوج کے درمیان بنتے ہیں (دفعہ ۷۲)

نتیجہ صریح (۱) قائم زائد کا کوئی قطر اور اس کے سروں پر کے ماس ہر متقارب کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح (۲) قائم زائد کا کوئی وتر اور اسکی تنصیف کرنیوالا قطر ہر متقارب کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہوتے ہیں۔ (198)

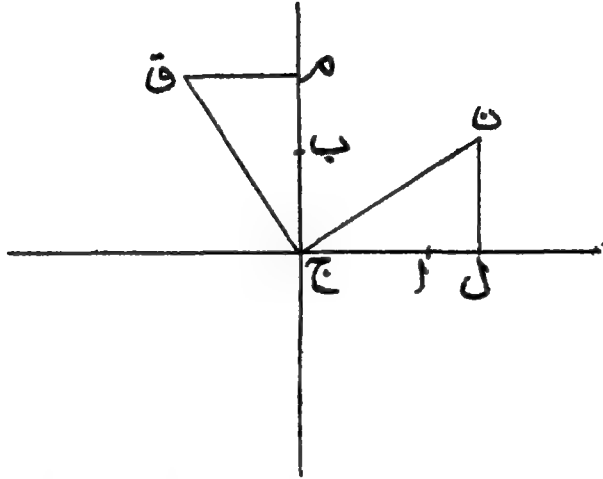
۱۹۳۔ مسئلہ۔ قائم زائد کا کوئی قطر مزدوج زائد کے اُس قطر کے مساوی ہوتا ہے جو اس پر عمود ہے۔

یہ ظاہر ہو جاتا ہے جب ہم غور کرتے ہیں کہ مزدوج زائد اس خاص

صورت میں ابتدائی زائد کے مساوی ہے اور یہ مزدوج زائد اس طرح حاصل ہو سکتا ہے کہ ابتدائی زائد کی پوری شکل کو ایک محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گذرے اور اس کے مستوی پر عمود ہو ایک قائمہ زاویہ میں سے گھمایا جائے۔

۱۹۴۔ اگر کسی زائد کا ایک قطر اس کے مزدوج زائد کے ایک قطر کے مساوی اور اس پر عمود ہو تو زائد کو قائم زائد ہونا چاہئے۔

فرض کرو کہ ج ن اور ج ق دو نیم قطر ایک دوسرے کے علی القیام
اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ن قطع زائد پر ہے اور ق فردوج قطع
زائد پر۔



ن ل اور ق م علی الترتیب قاطع اور فردوج محوروں پر عمود کھینچو۔

اب $\Delta ج ل ن \equiv \Delta ج م ق$

لیکن ن ل : ج ل = ج ا : ج ب (دفعہ ۱۶۷) (۱۹۴)

اور ق م : ج م = ج ا : ج ب

$$\therefore \frac{ج ل}{ج ا} = \frac{ن ل}{ج ب} = ۱$$

$$\text{اور } \frac{ج م}{ج ا} = \frac{ق م}{ج ب} = ۱$$

تفریق کرو اور ج ل = ج م اور ن ل = ق م کو استعمال
کرو تو

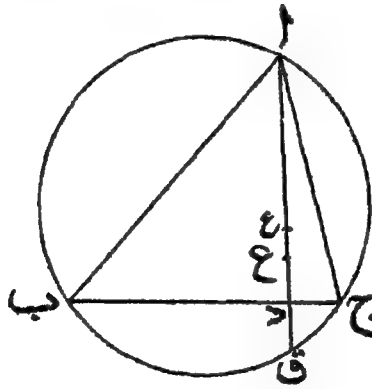
$$ج ل' \left(\frac{1}{ج} - \frac{1}{ب} \right) - ن ل' \left(\frac{1}{ب} - \frac{1}{ج} \right) = 0$$

$$\therefore ا ج = ب ج \text{ کیونکہ } ج ل' + ن ل' \neq 0$$

۱۹۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے راسوں میں سے گزرے تو وہ مثلث کے مرکز عمودی میں سے بھی گزریگا۔

فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے، ع اس کا مرکز عمودی ہے اور ب ج پر ا سے عمود ا د ہے۔

فرض کرو کہ قائم زائد ا د سے مرکز ع پر ملتا ہے۔
چونکہ وتر ا ع اور ب ج علی القوائم ہیں اس لئے ان کے متوازی قطروں میں سے ایک، زائد سے ملیگا اور دوسرا، فرد وج زائد سے۔



پس د ب \times د ج اور د ع \times د ا مختلف العلامت ہونگے

(دفعہ ۷۷ ا)

اور انہی عددی قیمتوں کی نسبت ایک کے مساوی ہوگی کیونکہ ان کے متوازی قطر علی القوائم ہونے کی وجہ سے مساوی ہیں۔

لیکن $\text{ب د} \times \text{ج} = \text{د} \times \text{ع} > \text{ا}$
 195) $\text{ب د} \times \text{ج} = \text{ا د} \times \text{ق}$ جہاں ق وہ نقطہ ہے
 جس پر ا د محدودہ حائل دائرہ سے
 ملتا ہے۔

$== \text{ا د} \times \text{ع} > \text{ع}$ (دفعہ ۶)
 $\text{د} \times \text{ا} = \text{ا د} \times \text{ع}$
 $\text{د} = \text{ع}$
 یعنی 'ع' پر منطبق ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ جب قائم زائد ایک مثلث کو محیط کر لیتا ہے تو اگر تینوں
 راس منحنی کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو مرکز عمودی دوسری شاخ پر واقع ہوگا
 لیکن دو راس ایک شاخ پر واقع ہوں اور تیسرا راس دوسری شاخ پر تو مرکز عمودی
 اس شاخ پر واقع ہوگا جس پر دو راس واقع ہیں۔

۱۹۶۔ مسئلہ۔ اگر کوئی مخروطی جو ایک مثلث کو محیط کرے
 مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزرے تو یہ مخروطی قائم زائد
 ہونا چاہئے۔

فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے اور ا د 'ب' ع 'ج' ف وہ
 عمود ہیں جو مرکز عمودی ع پر ملتے ہیں۔
 یہ ظاہر ہے کہ مخروطی کو قطع زائد ہونا چاہئے کیونکہ یہ ناممکن ہے کہ قطع ناقص یا قطع
 مکانی کے دو وتر ایک نقطہ پر جوں میں سے ایک کے باہر ہو اور دوسرے کے اندر ہو
 متقاطع ہوں لیکن وتر ا ع اور ب ج اسی طرح متقاطع ہوتے ہیں جو صرف
 زائد کی صورت میں ممکن ہے۔

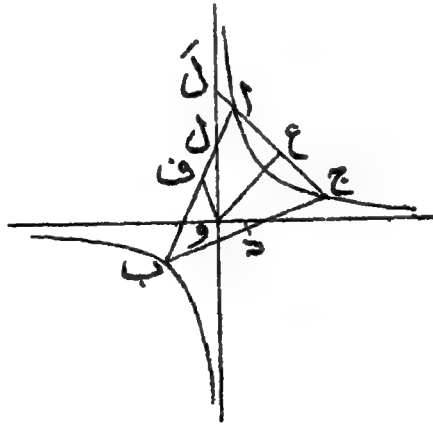
اب چونکہ $\text{ب د} \times \text{ج} = \text{ا د} \times \text{ع}$ اس لئے ب ج کے متوازی

قطر = ان کے متوازی قطر۔
اور ان قطروں میں سے ایک، قطع زائد سے متعلق ہونا چاہئے اور دوسرا
اس کے مزدوج زائد سے کیونکہ د ب x د ج اور د ع x د ا مختلف عللاً
ہیں۔

اسلئے قطع زائد قائم زائد ہونا چاہئے (دفعہ ۱۹۴)۔

۱۹۷۔ مسئلہ۔ اگر قائم زائد ایک مثلث کو محیط کرے تو اسکا
مرکز مثلث کے نو نقطی دائرہ پر واقع ہوگا۔
فرض کرو کہ ا ب ج مثلث ہے اور ضلعوں کے وسطی نقطے د، ع، ف
ہیں۔

فرض کرو کہ قائم زائد کا مرکز ل ہے اور ول ل ایک متقارب ہے
جو ا ب اور ا ج کو ل اور ل پر قطع کرتا ہے۔
چونکہ و ف، وتر ا ب کی تنصیف کرتا ہے اسلئے و ف اور
ا ب، ول ل کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں (دفعہ ۱۹۲ نتیجہ ص ۱۲)



$$\therefore د ف ول = د ف ل و$$

$$\text{اسی طرح } د ع ول = د ع ل و$$

= Δ ق ن ن (کیونکہ ج ط ق ن کے توازی)

۱۹۹۔ مسئلہ۔ قائم زائد کا کوئی وتر کسی قطر کے سروں پر اپنے

محاذی ایسے زاوے بناتا ہے جو مساوی ہوتے ہیں یا تکمیلی۔

فرض کرو کہ ایک وتر ق س ہے اور ایک قطر ن ج ن۔

فرض کرو کہ ن اور ن پر کے محاس متقابلوں سے ل ل اور ل

ل پر ملتے ہیں۔

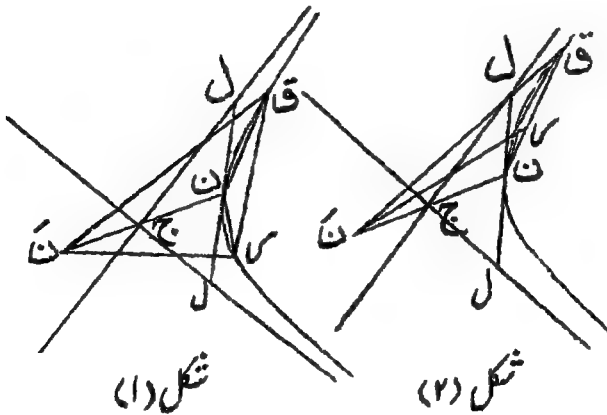
شکل (۱) میں جہاں ق اور س ایک ہی شاخ پر واقع ہیں اور
ن ن ق س کو داغلا قطع کرتا ہے

Δ ق ن ل = Δ ق ن ن (دفعہ ۱۹۸)

اور Δ س ن ل = Δ س ن ن

= Δ ق ن س = Δ ق ن ل اور س ن ل کے مجموعہ کا تکملہ

= Δ ق ن س کا تکملہ



شکل (۲) میں جہاں ق اور س ایک ہی شاخ پر واقع ہیں اور
ن ن ق س کو داغلا قطع کرتا ہے

$$\Delta \text{ل} \text{ن} \text{ر} = \Delta \text{ر} \text{ن} \text{ل}$$

$$\Delta \text{ل} \text{ن} \text{ق} = \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ل}$$

$$\Delta \text{ر} \text{ن} \text{ق} = \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ل} - \Delta \text{ر} \text{ن} \text{ل}$$

$$\Delta \text{ق} \text{ن} \text{ر} =$$

شکل (۳) میں جہاں ق اور ر مخالف شاخوں پر واقع

ہیں اور ن 'ق' ر کو داغلا قطع کرتا ہے

$$\Delta \text{ق} \text{ن} \text{ر} = \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ل} + \Delta \text{ل} \text{ن} \text{ل}$$

$$+ \Delta \text{ن} \text{ل} \text{ر}$$

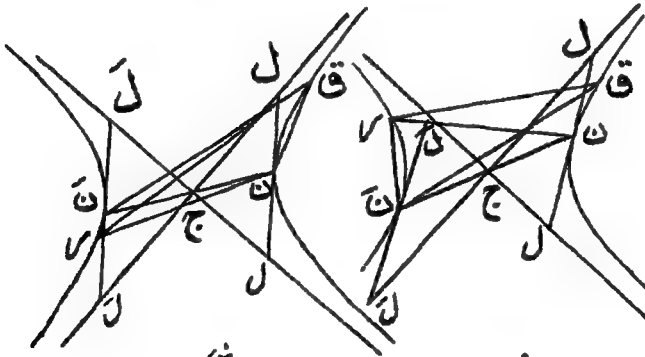
$$= \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ل} + \Delta \text{ن} \text{ل} \text{ر}$$

$$+ \Delta \text{ر} \text{ن} \text{ل}$$

$$= \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ر}$$

شکل (۴) میں جہاں ق اور ر مخالف شاخوں پر واقع ہیں اور

ن 'ق' ر کو خارجاً قطع کرتا ہے



شکل (۳)

شکل (۴)

$$\Delta \text{ق} \text{ن} \text{ر} = \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ل} + \Delta \text{ل} \text{ن} \text{ر}$$

$$= \Delta \text{ق} \text{ن} \text{ل} + \Delta \text{ل} \text{ن} \text{ر}$$

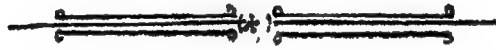
اور $\Delta ق ن ص = \Delta ق ن ل + \Delta ل ن ص$
 $= \Delta ق ن ل + \Delta ص ن ن$
 $\Delta ق ن ص + \Delta ق ن ل = \Delta ل ن ن$
 $+ \Delta ل ن ن$
 $= ۲ قائمہ زاوے$

مثالیں

- ۱۔ قائم زائد کے کسی ماس کا وہ حصہ جو اس کے متقاربوں کے درمیان منقطع ہوتا ہے اس فاصلہ کا دگنا ہوتا ہے جو اس کے نقطہ تماس کا مرکز سے ہے۔
- ۲۔ اگر ایک قائم زائد کے کسی نقطہ ن کا معین ن لی ہو اور ن پر کا عماد ن گ ہو تو ثابت کرو کہ ج ل = ل گ اور ن سے امدادی دائرہ کا ماس = ن لی
- ۳۔ اگر ایک قطع زائد کے کسی نقطہ ن کے ماس پر مرکز سے عمود ج گ ہو تو مثلثات ن ج ا، ج ا گ متشابه ہونگے۔
- ۴۔ ن ق ص ایک مثلث ہے جو ایک قائم زائد میں بنایا گیا ہے اور ن پر کا زاویہ قائمہ ہے۔ ثابت کرو کہ ن پر کا ماس ق ص پر عمود ہے۔
- ۵۔ اگر ایک قائم زائد کے عمود دار وتر ن ق اور ق ق ہوں تو ن ق ق ن علی القوائم ہونگے اور ن ق ق بھی علی القوائم ہونگے۔
- ۶۔ ایک قائم زائد کا کوئی وتر ن ق ہے اور ایک قطر جو اس وتر پر عمود ہے زائد سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ ن ق ن زائد کو قی پر مس کرتا ہے
- ۷۔ اگر ایک قائم زائد کے کسی قطر کے سروں سے منحنی کے کسی نقطہ تک خطوط کھینچے جائیں تو وہ ہر متقارب سے مساوی طور پر مل ہونگے۔
- ۸۔ قائم زائد کے ماسکی وتر جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہوں مساوی ہوتے ہیں۔ [دیکھو دفعات ۱۱۶، ۱۱۷]
- ۹۔ قائم زائد پر کے کسی نقطہ کا مرکز سے فاصلہ، اُن فاصلوں کے درمیان ہندسی

- اوسط ہوتا ہے جو اس نقطہ کو ماسکوں سے ہوتے ہیں۔
- ۱۰۔ اگر ایک قائم زائد کے قاطع محور پر N دوسرے میں ہو اور زائد کا مرکز J ہو تو J N پر کے ماس پر عمود ہوگا۔
- ۱۱۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز کسی قائم زائد پر واقع ہوتا ہے جو اس مثلث کو محیط کرتا ہے جس کے راس مثلث کے باہمی دائروں کے مرکز ہیں۔
- ۱۲۔ ماسکی وتر جو قائم زائد کے مزدوج قطروں کے متوازی ہوں مساوی ہوں گے۔
- ۱۳۔ اگر ایک قائم زائد کے کسی نقطہ N پر کا ماس مزدوج قطروں کے ایک زوج سے E اور F پر ملے اور زائد کا مرکز J ہو تو N J دائرہ J E F کو مس کریگا۔
- ۱۴۔ دو ماس قائم زائد کی ایک ہی شاخ پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ زاوے جو یہ ماس مرکز پر بناتے ہیں علی الترتیب ان زاویوں کے مساوی ہیں جو وہ وتر کا ساتھ بناتے ہیں۔
- ۱۵۔ ایک دائرہ اور ایک قائم زائد چار نقطوں پر متقاطع ہوتے ہیں اور ان کے مشترک دتروں میں سے ایک وتر، زائد کا ایک قطر ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرا مشترک وتر، دائرہ کا ایک قطر ہے۔
- ۱۶۔ ایک دے ہوئے متوازی الاضلاع کے اندر قطعات ناقص کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے ماس کے ایک قائم زائد پر واقع ہوتے ہیں۔
- ۱۷۔ اگر ایک قائم زائد کے مزدوج محور کے کسی نقطہ Q سے راس تک Q R کھینچا جائے اور Q S قاطع محور کے متوازی کھینچا جائے جو غنی سے S پر ملتا ہے تو Q S = Q ۔
- ۱۸۔ قائم زائد کے مزدوج قطروں کے سروں کو ملانے والے خطوط متعارفوں پر عمود ہوتے ہیں۔
- ۱۹۔ ایک مثلث کا قاعدہ اور قاعدہ پر کے زاویوں کا فرق دیا گیا ہے۔ اس کے راس کا طریق ایک قائم زائد ہوگا۔
- ۲۰۔ قائم زائد کے متوازی دتروں پر کھینچے ہوئے دائرے ہم محور ہوتے ہیں۔

- ۲۱۔ اگر ایک قائم زاہد ایک مثلث کو محیط کرے تو مثلث پائین خود مزدوج
مثلث ہوتا ہے۔
- ۲۲۔ قائم زاہد کے کسی نقطہ N پر نصف قطر انخلاء ایسا بدلتا ہے جیسے J N ^۳
اور مخفی کا قطر انخلاء کئے مرکزی وتر کے مساوی ہوتا ہے۔
- ۲۳۔ قائم زاہد کے کسی نقطہ پر عمادی وتر قطر انخلاء کے مساوی ہوتا ہے۔
- ۲۴۔ ایک قائم زاہد کے ایک متقارب پر زاہد کے کسی نقطہ N سے عمود
 N L کی پینا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ N L کی سمت میں وتر انخلاء J N کے مساوی
 N L



(201)

پندرہواں باب قائم تطیل

۲۰۰۔ جب ظل کا اس جس کے ذریعہ کوئی شکل ایک مستوی سے دوسرے مستوی میں منتقل کیجاتی ہے ان مستویوں سے بہت بڑے فاصلہ پر ہو تو وہ خطوط جو ابتدائی شکل اور اس کے ظل کے نظیری نقطوں کو ملاتے ہیں تقریباً متوازی ہو جاتے ہیں۔ اسطوائی ظل ہم اس ظل کو کہہ سکتے ہیں جس میں مستوی سے اس کے نقطے مستوی میں پر ایسے خطوں کے ذریعہ منتقل کئے گئے ہوں جو سب کے سب ایک دوسرے کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ہم اسے مخروطی ظل کی انتہائی صورت سمجھتے ہیں جبکہ اس خط لاتنا ہی پر ہو۔

اس مخصوص صورت میں جبکہ نظیری نقطوں کو ملائیوائے خطوط مستوی میں پر عمود ہوں جس پر مستوی سے اس کی شکل منتقل کیجا رہی ہے تو مستوی میں پر اس طرح جو شکل حاصل ہوگی اسے ابتدائی شکل کا قائم ظل کہا جاتا ہے۔

فضا میں پھیلے ہوئے نقطے جبکہ ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے ایک مستوی پر ان نقطوں سے عمود ڈالکر قائم طور پر منتقل کئے جاسکتے ہیں۔ ہر عمود کا پائین اس نقطہ کا ظل ہوگا جس سے وہ عمود کھینچا گیا ہے۔ اس طرح فضا کے وہ سب نقطے جو ایک ہی خط میں واقع ہوں اور یہ خط ظل کے مستوی پر عمود ہوں ایک ہی ظل رکھیں گے۔

اس باب میں یہ دکھایا جائیگا کہ قطع ناقص کے بعض خواص کس طرح دائرہ کے خواص سے حاصل کئے جاسکتے ہیں کیونکہ ہم دیکھیں گے کہ مربع قطع ناقص ایک دائرہ کا قائم ظل ہے۔ لیکن اس سے پیشتر قائم ظل کے بعض خواص ثابت کرنا ضروری ہے۔

۲۰۱۔ ابتدا یہ معلوم ہونا مناسب ہے کہ قائم ظل میں کوئی خط مستقیم نہیں ہوتا۔

بیساکہ مخروطی ظل میں ہوا کرتا ہے۔ مستوی س کا لاتنا ہی پر کا خط مستوی میں

میں لاتنا ہی پر کے خط میں مظل ہوتا ہے۔ یہ اس واقعہ سے ظاہر ہے کہ مستوی

میں کے ان نقطوں سے جو لاتنا ہی پر کے خط پر واقع ہیں اس مستوی پر کے

عمود مستوی س سے لاتنا ہی پر ملتے ہیں۔

(202)

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک قطع مکانی کا قائم ظل دو سر قطع مکانی ہوگا، ایک قطع زائد کا قائم ظل دو سر قطع زائد، اور ایک قطع ناقص کا قائم ظل دو سر قطع ناقص یا مخصوص صورتوں میں ایک دائرہ ہوگا۔

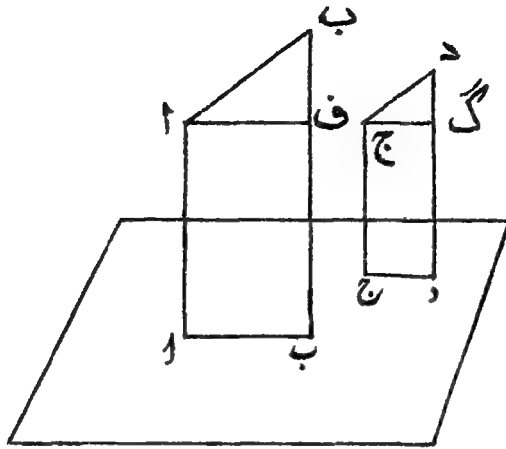
۲۰۲۔ قائم ظل سے متعلق حسب ذیل مسئلے اہم ہیں۔

مسئلہ۔ ایک خط مستقیم کا ظل دو سر خط مستقیم ہوگا۔

یہ اس واقعہ سے ظاہر ہے کہ قائم ظل مخروطی ظل کی صورت ایک تہائی صورت ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ مستوی میں کیا وہ خط جو کسی خط ل کا ظل ہو وہ خط ہوگا جس پر ل میں سے گزرنیوالا اور مستوی میں کے عمود وار مستوی میں کو قطع کرتا ہے۔

۲۰۳۔ مسئلہ۔ متوازی خطوط مستقیم متوازی خطوط مستقیم میں مظل ہونگے اور ظل کے خطوط کے طولوں میں وہی نسبت ہوگی جو ابتدائی خطوط کے طولوں میں ہے۔

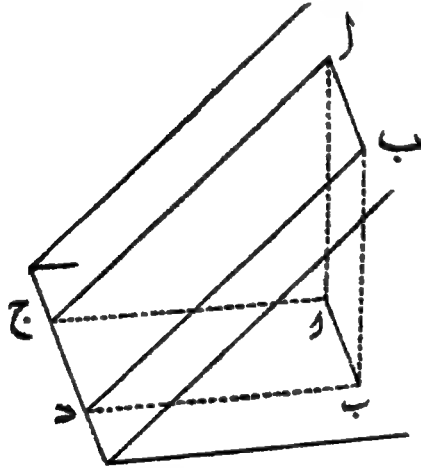
فرض کرو کہ فضا میں (ج) اور (ج) دو خطوط ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔



(208) فرض کرو کہ مستوی میں پران کے قائم ظل ا ب ج د ہیں۔
 ا ب اور ج د متوازی ہونے چاہئیں کیونکہ اگر بالفرض وہ ایک
 دوسرے سے نقطہ ن پر لیں تو ن ایک ایسے نقطہ کا ظل ہوگا جو ا ب اور
 ج د میں مشترک ہوگا۔
 اب ا ف اور ج گ علی الترتیب ا ب اور ج د کے
 متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ب ب اور د د سے ف اور گ
 پر ملتے ہیں۔ اب ا ب اور ج د ایک متوازی الاضلاع سے اور اس لئے
 ا ف = ا ب اور اسی طرح ج گ = ج د۔
 اب چونکہ ا ب ج د کے متوازی ہے اور ا ف ج گ
 کے متوازی ہے (کیونکہ یہ علی الترتیب ا ب اور ج د کے متوازی ہیں)
 اور ا ب اور ج د کا متوازی ہونا ہم ثابت کر چکے ہیں) اس لئے زاویہ
 ف ا ب = زاویہ گ ج د اور ف اور گ پر کے زاویے قائم ہیں
 ∴ ا ف ب د ج گ کے متشابه ہے۔
 ∴ ا ف : ج گ = ا ب : ج د

نتیجہ صریح۔ خط کے طول جو ایک ہی خط پر واقع ہوں اُسی نسبت میں متناسب ہوتے ہیں۔

۴۔ ۲۔ مسئلہ۔ اگر مستوی س میں ل ایک محدود خط ہو اور وہ مستوی س اور مستوی س کے خط تقاطع کے متوازی ہو تو مستوی س پر ل کا قائم ظل ایک خط ہوگا جو ل کے متوازی اور اس کے طول کے مساوی ہوگا۔



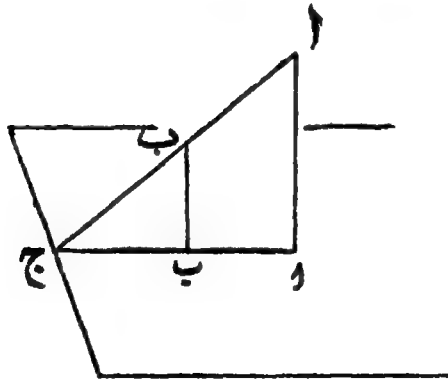
فرض کرو کہ محدود خط ل، ب ہے اور اس کا ظل ا ب ہے۔
س اور س کے خط تقاطع پر ا ج اور ب د عمود کھینچو۔
اب ا ج د ب ایک متوازی الاضلاع ہے۔
نیز چونکہ ا د اور ب ب، س پر عمود ہیں اس لئے ا ج د
اور د ب ج د پر عمود ہیں اور اس لئے وہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں
نیز ا ج د ب د ب د ب

کیونکہ $\angle ج = \angle د = \angle ا$ اور $\angle ج = \angle د = \angle ا$ کیونکہ $\angle ج$ اور $\angle د$ اور $\angle ا$ کے متوازی ہیں۔

∴ $\angle ج = \angle د = \angle ا$ ایک متوازی الاضلاع ہے کیونکہ $\angle ج$ اور $\angle د$ متوازی ہیں۔

$$\therefore \angle ا = \angle ج = \angle د$$

۲۰۵۔ مسئلہ۔ مستوی س کا کوئی محدود خط جو س اور س کے خط تقاطع پر عمود ہو ایک خط میں منظر ہو گا جو اس خط تقاطع پر عمود ہو گا اور جس کا طول ابتدائی خط کے طول کے ساتھ ایسی نسبت رکھے گا جو ان مستویوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام کے مساوی ہوگی۔
فرض کر دو س اور س کے خط تقاطع پر $\angle ا$ عمود ہے اور فرض کر دو اس کا خط تقاطع سے ج پر ملتا ہے۔



فرض کر دو کہ $\angle ا$ کا قائم منظر $\angle ب$ ہے۔

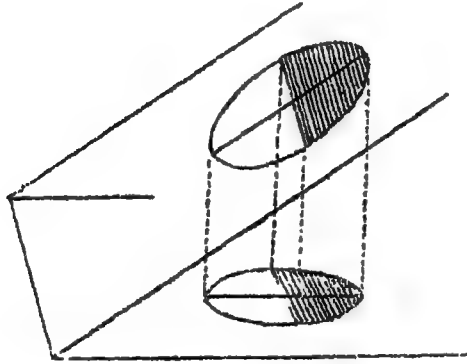
ا ب اور ا ب ج پر ملتے ہیں اور

$$ا ب : ا ب = ا ج : ا ج$$

$$= ج ا ج$$

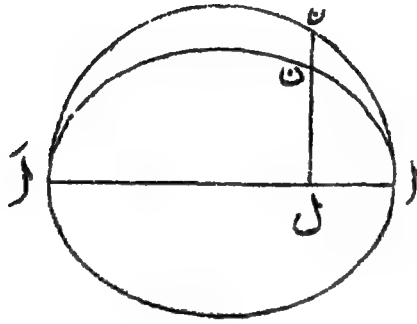
= ج ا ج (مستویوں س اور س کا درمیانی زاویہ)

۲۰۶۔ مسئلہ۔ مستوی س پر کی کوئی بند شکل 'مستوی س پر
(205) ایک بند شکل میں منسلل ہوگی جس کا رقبہ ابتدائی شکل کے رقبہ کے ساتھ
ایسی نسبت رکھیگا جو مستویوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام کے
مساوی ہوگی۔



کیونکہ ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ شکل بہت ہی کم عرض کی مستطیلی بیڑوں کی
لاتنا ہی تقرباً داد سے بنی ہے جن کے طول مستویوں س اور س کے
خط تقاطع کے متوازی ہیں۔ ان بیڑوں کے طول ظل میں نہیں بدلتے لیکن
عرض مستویوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام کی نسبت میں ٹھٹھے ہیں۔
۲۰۷۔ قطع ناقص، ایک دائرہ کا قائم ظل ہوتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۱۵) کہ قطع ناقص اور اس کے امدادی دائرہ کے
نظیری معین ایک دوسرے کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھتے ہیں یعنی
ب ج : ا ج



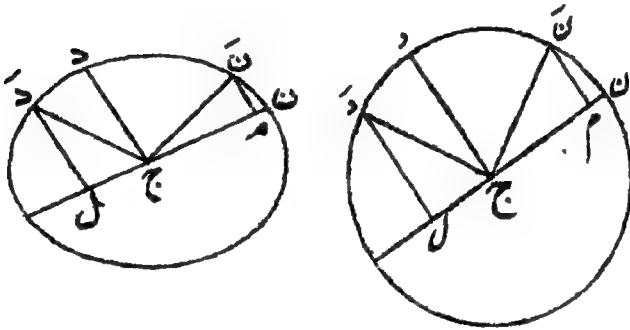
اب فرض کرو کہ امدادی دائرہ کو غوراً غم (ا) کے گرد اتنا گھمایا
گیا ہے کہ وہ ایک ایسے مستوی میں آجاتا ہے کہ اس مستوی اور قطع ناقص کے
مستوی کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام ب ج : ا ج ہے۔
(206) یہ ظاہر ہے کہ وہ خطوط جو قطع ناقص کے ہر نقطہ کو اس نقطہ کے نئے
محلول سے جو امدادی دائرہ پر اس کے جواب میں ہے ملاتے ہیں قطع ناقص کے
مستوی پر پیوستہ ہونگے۔

اس طرح قطع ناقص کے نئے محل والے دائرہ کا تمام ظل ہے۔
اس لئے قطع ناقص کے بعض خواص دائرہ کے خواص سے قائم ظل کے
ذریعہ اخذ کئے جاسکتے ہیں۔ ہم اس کی چند مثالیں دیں گے۔

۲۰۸۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے مزدوج نیم قطروں کا ایک

زوج ج ن اور ج د ہو اور ایسا ہی دوسرا زوج ج ن اور
ج د ہو اور اگر ج ن پر معین ن م اور د ل کھینچے جائیں تو

ن م : ج ل = د ل : ج م = ج د : ج ن
 فرض کرو کہ اندادی دائرہ کے نظیری نقطے چھوٹے حروف سے تعبیر
 کئے گئے ہیں اور اندادی دائرہ کو محور اعظم کے گرد اتنا گھمایا گیا ہے کہ
 وہ قطع ناقص کے مستوی کے ساتھ زاویہ $\frac{1}{2}$ ج بنا آئے۔



اب ج ن اور ج د عمودی نصف قطر ہیں، اسی طرح ج ن اور
 ج د بھی عمودی نصف قطر ہیں۔ ن م اور د ل ج د کے متوازی ہوں گی
 وجہ سے ج ن پر عمود ہونے اور ہیں حاصل ہوگا

$$\Delta ج م ن = \Delta د ل ج$$

$$\therefore ن م : ج د = ج ل : ج ن$$

$$\text{اور } د ل : ج د = ج م : ج ن$$

۲۰۳ دفعہ کی رو سے

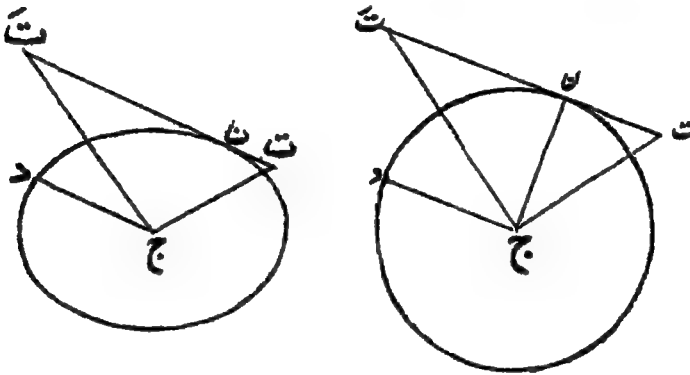
$$ن م : ج د = ج ل : ج ن$$

$$د ل : ج د = ج م : ج ن$$

$$\therefore ن م : ج ل = ج د : ج ن = د ل : ج م$$

۲۰۹۔ مسئلہ۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر کاماس مزدوج (207) قطروں کے کسی مزدوج سے ت اور ت پر ملے اور ج د ج ن کا مزدوج ہو تو

ت ن × ن ت = ج د
کیونکہ دائرہ کی نظیری شکل میں ج ت اور ج ت علی القوائم ہیں اور ج ن ت ت پر عمود ہے۔



$$: : \text{ت ن} \times \text{ن ت} = \text{ج ن} = \text{ج د}$$

$$: : \text{ت ن} : \text{ج د} = \text{ج د} : \text{ن ت}$$

$$: : \text{ت ن} : \text{ج د} = \text{ج د} : \text{ن ت}$$

$$: : \text{ت ن} \times \text{ن ت} = \text{ج د}$$

۲۱۰۔ مسئلہ۔ قطع ناقص کا رقبہ جسکے نیم محور ج ۱ اور ج ب

ہوں $\pi \times \text{ج ۱} \times \text{ج ب}$ ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ دو دائرے جو ایک ہی ستوی میں واقع ہوں متشابہ اور متشابہاً واقع دو قطعات ناقص میں قائم طور پر منسلک ہونگے۔
کیونکہ ان کے خروج المکز مساوی ہوں گے اور ایک کا محور اعظم دوسرے کے محور اعظم کے متوازی ہوگا کیونکہ ان میں سے ہر ایک محور اعظم مستویوں کے خط تقاطع کے متوازی ہونا چاہئے۔

نتیجہ صریح ۲۔ دو متشابہ اور متشابه واقع قطعاً ناقص ایک ساتھ دو دائروں کے قائم ٹپل ہوتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ قطع ناقص کے دتروں کا ایک سلسلہ ایک ثابت نقطے میں سے گزرتا ہے ثابت کرو کہ ان کے نقاط وسطی کا طریق ایک متشابه اور متشابه واقع ناقص ہے۔
۲۔ اگر ایک قطع ناقص کے اندر ایک متوازی الاضلاع بنایا جائے تو اس کے اضلاع مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں اور ایسے متوازی الاضلاع کا بڑے سے بڑا رقبہ $\frac{1}{2} \times$ (ج) ہوتا ہے۔

۳۔ اگر ایک قطع ناقص کا کوئی وتر n ق ہو جو j ج کے فرد j قطر سے t پر ملتا ہے تو n ق \times t = 2 ج \times جہاں ج n ق کے متوازی قطر ہے۔

۴۔ اگر ایک قطع ناقص کا ایک متغیر وتر اپنے متوازی قطر کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھے تو وہ ایک دوسرے متشابہ ناقص کو جس طرح لگیا جس کے محور ابتدائی ناقص کے محوروں پر رہو گئے۔

۵۔ وہ نثر سے بڑا مثلث جو ایک قطع ناقص کے اندر بنایا جاسکتا ہے ایسا ہوتا ہے کہ اسکا ایک ضلع قطع ناقص کے ایک قطر سے تنصیف ہوتا ہے اور دوسرے

(209)

- ضلع فردوج قطر سے نقاط تثلیث پر منقطع ہوتے ہیں۔
- ۶۔ اگر ایک خط مستقیم دو ہم مرکز، متشابہ اور متشابہ واقع قطعات ناقص سے ملے تو منحیوں کے درمیان اس خط مستقیم کے جو حصے قطع ہونگے وہ مساوی ہونگے۔
- ۷۔ فردوج قطروں کے زوجوں کے میروں پر کے مماثلوں کے نقاط تقاطع کا طریق ایک ہم مرکز، متشابہ اور متشابہ واقع قطع ناقص ہوتا ہے۔
- ۸۔ اگر ایک قطع ناقص کے فردوج نیم قطر ج ن اور ج د ہوں اور ب ن اور ب د کو ملایا جائے اور ا د اور ا ن پر تقاطع ہوں تو شکل ب د و ن ایک متوازی الاضلاع ہوگی۔
- ۹۔ دو قطعات ناقص جنکے محور ایک دوسرے کے علی التوا ہیں چار نقطوں پر تقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مشترک وتروں کا کوئی زوج ایک محور کے ساتھ مساوی زاوے بنائیگا۔
- ۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک قطع ناقص کا کوئی دائرہ انحناء اور خود قطع ناقص علی التوا ایک قطع ناقص اور اس کے ایک دائرہ انحناء میں قائم طور پر مغلل کئے جاسکتے ہیں۔

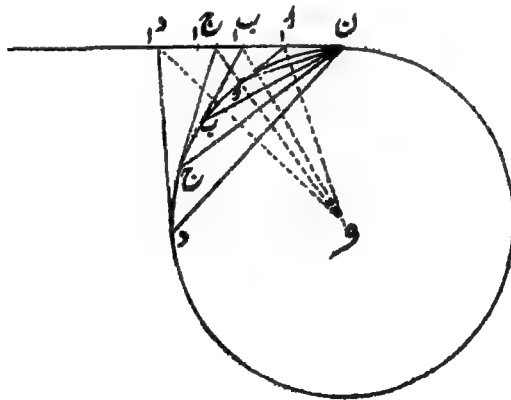


سولہواں باب

مخروطیوں کے چلیبہ نسبتی خواص

(210)

۲۱۲۔ مسئلہ۔ اگر ایک مخروطی پر چار ثابت نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' ہوں اور اس پر ایک متغیر نقطہ 'ن' ہو تو چلیبہ نسبت 'ن' (ا' 'ب' 'ج' 'د') مستقل اور ان چار نقطوں کی متناسط چلیبہ نسبت کے مساوی ہوگی جن پر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' پر کے ماس 'ن' پر کے ماس سے ملے ہیں۔



مخروطی کو ایک دائرہ میں منطلل کرو اور نل میں متناظر چھوٹے حروف استعمال کرو۔ تب

ن (ا ب ج د) = ن (ا ب ج د)
لیکن ن (ا ب ج د) مستقل ہے کیونکہ زاویے ا ن ب ب ن ج
ج ن د مستقل ہیں یا اپنے منکملوں میں بدلتے ہیں جیسے ن دائرہ پر حرکت
کرتا ہے۔ اس لئے ن (ا ب ج د) مستقل ہے۔
فرض کرو کہ ا ب ج د پر کے ماس ن پر کے ماس سے ا ب
ج د پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز د ہے۔
اب د ا ب د ج د م علی الترتیب ن ا ب ن ج
ن د پر عمود ہیں۔

(211)

ن (ا ب ج د) = د (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

ن (ا ب ج د) = (ا ب ج د)

نتیجہ صریح۔ اگر مخروطی پر د سے قریب ایک نقطہ ا ہو تو

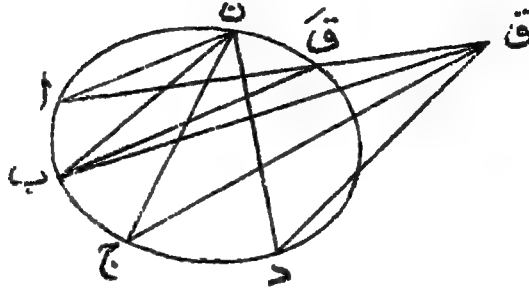
ا (ا ب ج د) = ن (ا ب ج د)
ا اگر ا پر کا ماس ا ت ہو تو

نوٹ۔ اس خاص صورت میں جبکہ وہ منسل جو مخروطی پر کے کسی نقطہ
ن کو چار ثابت نقطوں ا ب ج د سے ملانے سے بنے موسیقی ہو تو
ہم مخروطی پر کے ایسے نقطوں کو موسیقی کہتے ہیں۔ مثلاً اگر ن (ا ب ج د) =
تو ہم کہتے ہیں کہ ا اور ج ب اور د کے موسیقی فردوج ہیں۔

۲۱۳۔ مسئلہ۔ اگر ایک مستوی میں چار غیر ہم خط نقطے ا

ب ج د ہوں اور ن ایک ایسا نقطہ ہو کہ ن (ا ب ج د)
مستقل ہے تو ن کا طریق ایک مخروطی ہوگا۔

فرض کرو کہ ق ایک ایسا نقطہ ہے کہ
 $ق (ا ب ج د) = ن (ا ب ج د)$



اب اگر نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ن' میں سے گزرنی والا مخروطی
 ق میں سے نہ گزرے تو فرض کرو کہ وہ ق (کو ق) قطع کرتا ہے۔

ن (ا ب ج د) = ق (ا ب ج د) دفعہ ۲۱۳ کی رو سے

ق (ا ب ج د) = ق (ا ب ج د)

اس لئے پتلیں ق (ا' ب' ج' د') اور ق (ا ب ج د)

ہم رسم ہیں اور ان میں شعاع ق ق مشترک ہے۔

(212) اس لئے (دفعہ ۶۴) وہ ہم محورانہ نظرہ میں ہیں یعنی ا' ب' ج' د'

ہم خط ہیں۔

لیکن یہ مفروضہ کے خلاف ہے۔

اس لئے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ن' میں سے گزرنے والا مخروطی ق

میں سے گزرتا ہے۔

اس طرح ہمارا مسئلہ ثابت ہو چکا۔

ہمیں اوپر سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم ایک مخروطی کو جو پانچ نقطوں

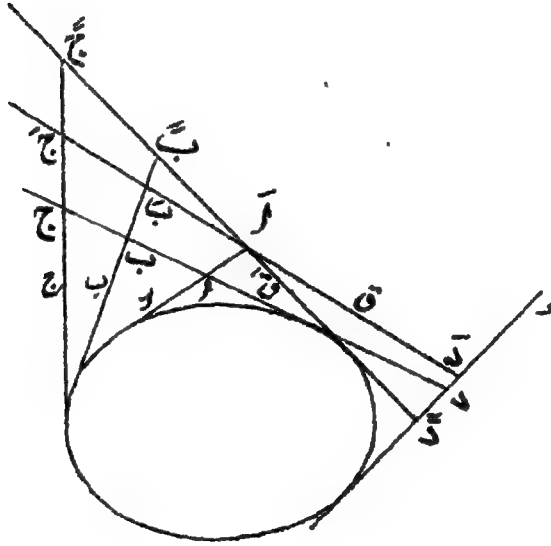
'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ن' میں سے گزرے ایک ایسے نقطہ ن کا طریق

سمجھ سکتے ہیں کہ

$$ن (ا ب ج د) = ۶ (ا ب ج د)$$

۲۱۴۔ اگر ایک متغیر خط چار ہم مستوی ثابت خطوط مستقیم کو جو ہم نقطہ
نہوں چار نقطوں پر قطع کرے اور ان چار نقطوں سے مستقل جلیبی نسبت
کی ایک سمت بنے تو اس خط کا لفاف ایک مخروطی ہوگا جو ان چار
خطوں کو مس کرے گا۔

پہلے یا راست پچھلے دفعہ کے مسئلہ سے مکافات کے ذریعہ جس کا ذکر
ہم آئندہ باب میں کریں گے، ماخوذ ہو سکتا ہے۔



حسب ذیل ثبوت مکافات کے اصول پر منحصر نہیں ہے۔
فرض کرو کہ خطان چار غیر ہم نقطہ خطوں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کو نقطوں 'ن'
'ب' 'ج' 'د' پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ (ا ب ج د) = دیا ہوا مستقل۔

(213) فرض کرو کہ خط ق، اُن ہی چار خطوں کو ایسے نقطوں (ا، ب، ج، د) میں قطع کرتا ہے کہ

$$(ا ب ج د) = (ا ب ج د)$$

اب اگر ق اُس مخروطی کا ماس نہیں ہے جو (ا، ب، ج، د) کو مس کرتا ہے تو ق کے نقطہ (ا سے مخروطی کا ایک ماس ق کیجیو۔
فرض کرو کہ خطوط ب، ج، د، ماس ق کو نقطوں (ب، ج، د) میں قطع کرتے ہیں۔

$$(ا ب ج د) = (ا ب ج د) \text{ دفعہ } ۲۱۲ \text{ کی رو سے}$$

$$(ا ب ج د) =$$

اس لئے اس قیں (ا، ب، ج، د) اور (ا، ب، ج، د) ہم رسم ہیں اور وہ ایک متناظر مشترک نقطہ رکھتی ہیں۔

اس لئے وہ منظرہ میں ہیں (دفعہ ۶۰) جو ہمارے اس مفروضہ کے خلاف ہے کہ (ا، ب، ج، د) غیر ہم نقطہ ہیں۔

اس لئے ق ایسی مخروطی کو مس کرتا ہے جسے (ا، ب، ج، د) مس کرتے ہیں۔

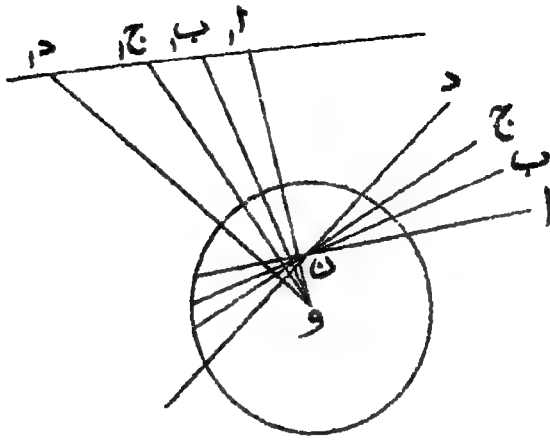
اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۲۱۵۔ مسئلہ۔ اگر ایک مخروطی ماس کے مستوی میں ایک پنل (ا، ب، ج، د) ہو اور مخروطی ماس کے لحاظ سے ن (ا، ب، ج، د) کے قطب (ا، ب، ج، د) ہوں تو

$$ن (ا ب ج د) = (ا ب ج د)$$

اسے صرف ایک دائرہ کی صورت میں ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ مخروطی کو ایک دائرہ میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے۔



اب و 'ا'، و 'ب'، و 'ج'، و 'د' علی الترتیب 'ن' 'ا'، 'ن' 'ب'،
 'ن' 'ج'، 'ن' 'د' پر نمود ہیں۔

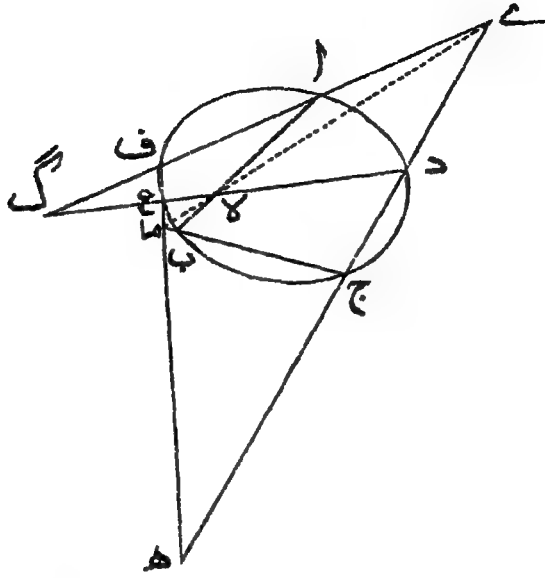
(214)

$$ن (ا ب ج د) = و (ا ب ج د) = (ا ب ج د) (ا ب ج د)$$

یہ مسئلہ مکافات کے اغراض کے لئے سب سے بڑی اہمیت رکھتا ہے۔
 ہم قبل ازیں دیکھ چکے ہیں کہ نقطوں کی ایک سمت کے قطبی ایک
 پنسل بناتے ہیں۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ پنسل سمت کے ساتھ ہم رسم ہوتی ہے

۲۱۶۔ بیاسکال (Pascal) کا مسئلہ۔ اگر ایک

مخروطی چہ نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع'، 'ف' میں سے گزرے
 تو ان ساٹھ مختلف مسدسوں (چہ ضلعی اشکال) میں سے جو ان
 نقطوں سے بنائے جاسکتے ہیں ہر ایک مسدس کے متقابلہ
 اضلاع کے اڑواں ہم خط نقطوں میں تقاطع ہونگے۔



اس مسئلہ کو تفصیل کے ذریعہ ثابت کیا جاسکتا ہے (دیکھو شمال ۲۵)
 دسواں باب)۔ یا ہم ایسے حسب ذیل طریقہ پر ثابت کر سکتے ہیں۔
 اُس مسئلہ میں یا چہ ضلعی پر غور کرو جو اضلاع (ا ب ج د ع ف) سے بنتا ہے۔
 اضلاع کے زوج جو متقابلہ کہلاتے ہیں (ا ب اور د ع ب ج اور ع ف) اور ف ا ج د اور ف ا ہیں۔
 فرض کرو کہ یہ متقابلہ ازواج علی الترتیب لا 'ما' سے پر ملتے ہیں۔
 فرض کرو کہ ج د ع ف سے ہ پر ملتے ہیں اور د ع ف ا سے گ پر ملتے ہیں۔

اب چونکہ (ا ب د ع ف) = (ج د ع ف)

∴ (لا د ع گ) = (ما ه ع ف)

یہ ہم رسم سقیم لا د ع گ اور ما ه ع ف ایک مشترک

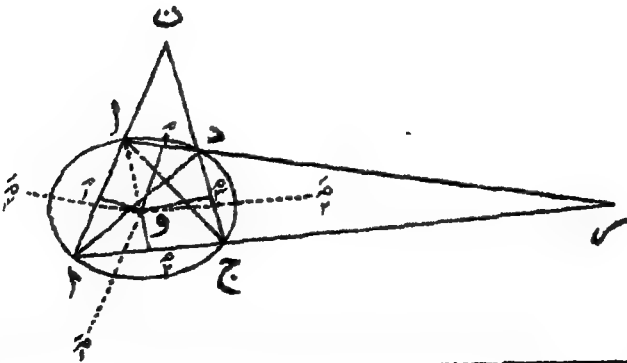
متناظر نقطہ ع کھتی ہیں۔
 ۲۱۷۔ کھادھ اور ف گ ہم نقطہ ہیں (دفعہ ۶۰)۔
 ۲۱۸۔ کھادھ اور ف گ کا نقطہ تقاطع ہے، کھادھ پرواق ہے۔
 اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

طالب علم اپنا طہیان کرے کہ چہ دے ہوئے راسوں سے جتنے
 مسدس بن سکے ہیں ان کی تعداد سامٹہ ہے۔

۲۱۹۔ بریانکھان کا مسئلہ۔ اگر ایک مخروطی میں ایک مسدس

بنایا جائے تو متقابلہ راسوں کو ملائے واسے خطوط ہم نقطہ ہوتے ہیں
 اسے دفعہ ۲۱۶ کے مشابہ طریقہ سے ثابت کیا جاسکتا ہے جنانچہ اسکا
 ثبوت طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ہم اس پر اتفاق کریں گے کہ
 اس مسئلہ کو بیا سکل کے مسئلہ سے بذریعہ مکافات اخذ کریں۔ علم ہند سہ جدید
 کے اس اہم طریقہ کے اصولوں پر ہم آئندہ باب میں بحث کریں گے۔

۲۱۸۔ مسئلہ۔ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنے والے مخروطیوں
 مرکوزوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔



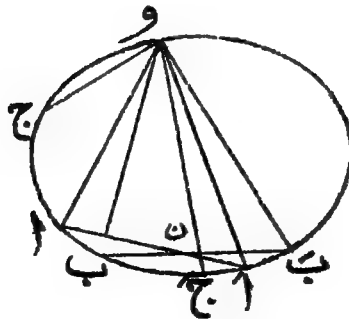
جو چار زاویوں کے، تہوں کے نقاط تقاطع ہیں۔
کیونکہ دئے ہوئے ثابت چار نقطوں میں سے گزرنیوالے مخروطیوں میں سے
ایک 'خطوط' اب اور ج د کا زوج ہے اور اس مخروطی کا مرکز ن ہے۔
اسی طرح بق اور س کے لئے۔

۲۱۹ مسئلہ۔ اگر وہ 'ا' 'ا' 'ب' 'ب' 'ج' 'ج' 'ا' ایک درپیش پل ہو اور
اگر وہ میں سے ایک مخروطی کھینچا جائے جو ان شعاعوں کو 'ا' 'ا' 'ب' 'ب'
'ج' 'ج' قطع کرے تو دتر 'ا' 'ا' 'ب' 'ب' 'ج' 'ج' ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ 'ا' 'ا' اور 'ب' 'ب' 'ن' پر متقاطع ہوتے ہیں۔
مخروطی کی تطیل ایک دائرہ میں اس طرح کرو کہ 'ن' دائرہ کے مرکز میں تقابل ہو۔
غل میں چھوٹے حروف استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ 'ا' 'ا' 'و' 'و'
ب و ب علی الفہم ہیں کیونکہ وہ ایک نصف دائرہ میں ہیں۔

اس لئے وہ ایک قائم درپیش کی تعین کرتے ہیں۔
ج و ج ایک قائمہ زاویہ ہے یعنی ج 'ج' 'ن' میں سے گزرتا ہے۔
ج 'ج' 'ن' میں سے گزرتا ہے۔

(217)



یہ ذہن نشیں رہے کہ نقاط ۱) 'ک' ب' ج' کو جب مخروطی پر

کے کسی دوسرے نقطہ سے ملایا جاتا ہے تو ان سے ایک درہجہ پشل حاصل ہوتی ہے۔ اسکو دفعہ ۲۱۲ کے اطلاق سے فوراً افہ کیا جاسکتا ہے۔

ایسے نقطوں کے کسی نظام کو مخروطی پر کی درہجہ سعت کہتے ہیں۔

نقطہ 'ن' جہاں نظیری وتر متقاطع ہوتے ہیں درہجہ کا قطب کہلاتا ہے۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک مخروطی پر موسیقی نقطوں کے زوج (ن' ن') (ق' ق') ہوں

(دیکھو نوٹ دفعہ ۲۱۲) تو ثابت کرو کہ 'ن' پر کا حماس اور 'ن' 'ن' ق' اور

'ن' ق' کے موسیقی فردوج ہیں۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر 'ن' پر کا عماد 'ن'

ہو تو 'ن' ق' اور 'ن' ق' 'ن' کے ساتھ مساوی زاوے بناتے ہیں۔

۲۔ خط مستقیم 'ن' 'ن' ایک مخروطی کو 'ن' اور 'ن' پر قطع کرتا ہے اور

'ن' پر عماد ہے۔ خطوط مستقیم 'ن' ق' اور 'ن' ق' 'ن' کے ساتھ مساوی

طور پر مائل ہیں اور مخروطی کو مکرر ق' اور ق' پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ن' ق'

اور 'ن' ق' 'ن' اور 'ن' پر کے حماس کے موسیقی فردوج ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر وہ پشل جو مخروطی پر کے کسی نقطہ کو مخروطی پر کے کسی

چار ثابت نقطوں سے ملانے سے بنتی ہے موسیقی ہے تو اس چار زاویوں کے دو ضلع

جو ان چار ثابت نقطوں سے بنتا ہے مخروطی کے لحاظ سے ایک دوسرے کے فردوج ہیں۔

۴۔ ایک قطع زائے کے کسی نقطہ 'ن' پر کا حماس متعارفوں سے ہم اور ہم

پر متقاطع ہوتا ہے اور راسوں پر کے حماسوں سے 'ل' اور 'ل' پر متقاطع ہوتا ہے

ثابت کرو کہ

$$ن م = ن ل \times ن ل$$

۵۔ پیاسکال کے مسئلہ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مخروطی ایک مثلث کے

راسوں میں سے گزرنے تو ان نقطوں پر کے ماس متقابلہ اضلاع سے ہم خط نقطوں ملیں گے۔

[خردوٹی میں ایک سس (ا ب ج ج) ایسا لکھ کر (ا ب ج) راسوں (ب ج) کے قریب ہوں۔]

۶۔ ایک قطع زائد کے تین نقطے اور دونوں متقاربوں کی سمتیں دی گئی ہیں۔ وہ نقطہ تقاطع معلوم کرو جہاں ایک دیا ہوا خط جو ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے منحنی کو قطع کرتا ہے۔

۷۔ خردوٹی پر کے ایک ثابت نقطہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو خردوٹی کو مکمل نقطہ ن پر اور ایک دے ہوئے اندرونی مثلث کے ضلعوں کو نقطوں (ا ب ج) پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ (ن ا ب ج) مستقل ہے۔

۸۔ ایک قطع زائد پر کوئی چار نقطے (ا ب ج د) ہیں ج ج کو ایک متقارب کے متوازی ہے۔ (د سے گ پر ملتا ہے اور د ل جو دوسرے متقارب کے متوازی ہے ج ب سے ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ گ ل ا ب کے متوازی ہے۔

۹۔ پیاسکل کے ان ساٹھ خطوط میں سے جو خردوٹی پر کے چھ نقطوں کے جواب میں ہوتے ہیں تین تین ایک ہی نقطہ میں متقاطع ہوتے ہیں۔

۱۰۔ ایک قطع زائد پر جس کے متقارب ج ا اور ج ب ہیں کوئی دو نقطے د اور ع لگے ہیں۔ د اور ع میں سے گزرنے والے اور ج ا اور ج ب کے متوازی خطوط ق پر ملتے ہیں۔ د پر کا ماس ج ب سے س پر ملتا ہے اور ع پر کا ماس ج ا سے ت پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ت ق س ہم خط نقطے ہیں جو د ع کے متوازی خط پر واقع ہیں۔

۱۱۔ ایک خردوٹی کے نقطوں ا اور ب پر کے ماس ج ا اور ج ب ہیں اور خردوٹی پر دوسرے نقطے د اور ع ہیں۔ خط ج د ا ب کو گ پر ا ع کو ہ پر اور ب ع کو ک پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج د : گ د = ج ہ : گ ہ ج ک : گ ک = ج ہ : گ ہ

۱۲۔ ایک مخروطی پر کے ایک ثابت نقطہ (میں سے دو ثابت خطوط مستقیم
'ع' 'ا' 'ع' کھینچے گئے ہیں مخروطی پر میں اور میں دو ثابت نقطے ہیں اور
ن ایک متغیر نقطہ ہے۔ ن میں اور ن میں 'ا' 'ع' اور 'ا' 'ع' سے علی الترتیب
ق اور ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ق ق ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے
۱۳۔ اگر دو مثلث منظرہ میں ہوں تو ان کے غیر نظیری ضلعوں کے چہ نقاط
تقاطع ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں اور منظرہ کا محور ان چہ نقطوں کے بیاسکال خطوں
میں سے ایک ہوتا ہے۔

(219) ۱۴۔ اگر مخروطی پر کے ایک ثابت نقطہ ن میں سے مخروطی کے دو وتر
ن ق اور ن ق' ن پر کے ماس کے ساتھ مساوی طور پر مائل ہوں تو وتر
ق ق ایک ثابت نقطہ میں سے گذریگا۔

۱۵۔ اگر خطوط 'ا' ب 'ج' ج 'د' 'ا' ایک مخروطی کو علی الترتیب
ن 'ق' 'ر' میں پیرس کریں تو ثابت کرو کہ مسدسات (ن ق ج ر میں
اور ب ق ر د میں ن میں مخروطی کھینچے جاسکتے ہیں۔

۱۶۔ ایک قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا ماس امدادی دائرہ سے ما اور
ما پر ملتا ہے۔ (س میں) محور اعظم ہے اور میں ما اور میں ما' ماسوں
سے عمود ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطوں 'ا' 'ما' 'ما' 'ا' سے دائرہ پر کے کسی نقطہ تک
کھینچے ہوئے خطوط ایک ایسی پینل بناتے ہیں جسکی طیپی نسبت 'ن کے محل پر منحصر
نہیں ہوتی۔

۱۷۔ اگر ایک دائرہ پر 'ا' اور ب دئے ہوئے نقطے ہوں اور ج د ایک
دیا ہوا قطر ہو تو دریافت کرو کہ دائرہ پر ایک ایسا نقطہ ن کس طرح معلوم کیا جاسکتا
ہے کہ ن ا اور ن ب 'ج د کو ان نقطوں پر قطع کریں جو مرکز سے مساوی
فاصلہ پر ہوں۔

شتر ہواں باب

مکافات

(220)

۲۲۰۔ اگر ایک سُتوی میں متعدد نقطے 'ن'، 'ق'، 'م' اور غیر ہوں اور اس سُتوی میں ایک مخروطی 'خ' کے لحاظ سے ان نقطوں کے قطبی 'ن'، 'ق'، 'م' ہوں تو جیسا کہ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں وہ خط جو کسی دو نقطوں 'ن' اور 'ق' کو ملاتا ہے بلحاظ 'خ' کے نظیری خطوں 'ن' اور 'ق' کے نقطہ تقاطع کا قطبی ہوگا۔ خطوں 'ن' اور 'ق' کے نقطہ تقاطع کو علامت ('ن ق') سے اور نقطوں 'ن' اور 'ق' کو ملانے والے خط کو علامت ('ن ق') سے تعبیر کریں سہولت ہوگی۔

نقطہ 'ن'، خط 'ن' کا جواب اس مفہوم میں ہے کہ 'ن' کا قطب ہے۔ اسی طرح خط ('ن ق')، نقطہ ('ن ق') کا جواب اس مفہوم میں ہے کہ 'ن ق'، ('ن ق') کا قطبی ہے۔

مثلاً اگر 'ف' ایک شکل ہو جو نقطوں اور خطوں کے ایک اجتماع پر مشتمل ہے تو اس کے جواب میں ایک شکل 'ف' ملے گی جو خطوں اور نقطوں پر مشتمل ہوگی۔ دو ایسی شکلیں ایک دوسرے کے لحاظ سے متکافی شکلیں

کہلاتی ہیں۔ انکی مکافات کا واسطہ مخروطی 'خ' ہے۔ دفعہ ۲۱۵ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ 'ف' میں نقطوں کی

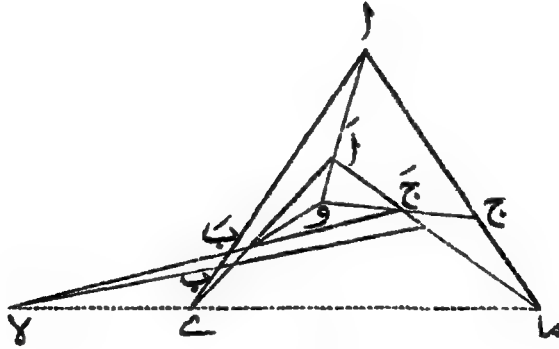
کسی سمت کے جواب میں ف میں خطوں کی ایک منسل جو سمت کے ساتھ ہم رسم
ہے حاصل ہوتی ہے۔

(221)

۲۲۱۔ تناظر کے اصول کی مدد سے جبکی تعریف پہلے دفعہ میں لگائی ہے ایک
شکل کی ایک معلومہ خاصیت سے ایک اور شکل کی دوسری خاصیت اخذ
کیجا سکتی ہے جہاں قبل الذکر شکل نقطوں اور خطوں پر مشتمل ہے اور بعد الذکر
خطوں اور نقطوں پر۔

ان میں سے ایک خاصیت کو دوسری کا متکافی کہتے ہیں اور ایک خاصیت
سے دوسری تک جانیکے عمل کو مکافات کہتے ہیں۔
اب ہم اس کی مثالیں دیتے۔

۲۲۲۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر دو مثلثوں 'ا ب ج' 'ا ب ج' کے راس
منظرہ میں ہوں تو نظیری اضلاع کے ازواج (ب ج) (ب ج) (ج ا) (ج ا)
اور (ا ب) (ا ب) ہم خط نقطوں لا کما سے پر متقاطع ہوتے ہیں۔



شکل ف

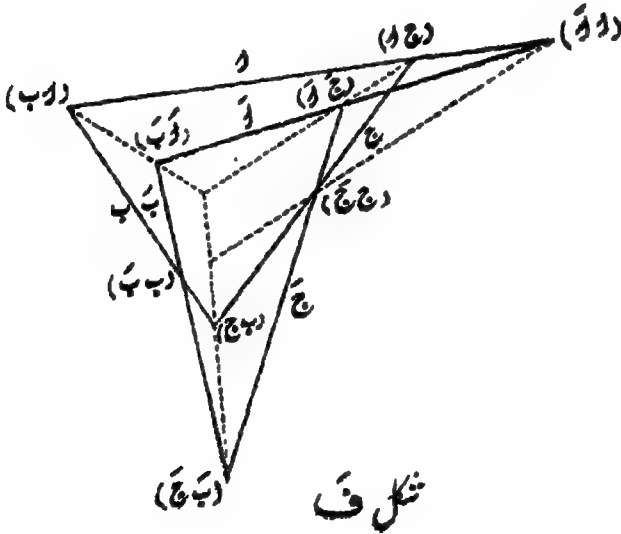
اگر ہم مثلث 'ا ب ج' کے راسوں کے جواب میں متکافی شکل بنائیں تو
تین خط 'ا ب' 'ج' حاصل ہونگے جن سے ایک مثلث نیکاجس کے راس
(ب ج) (ج ا) (ا ب) ہونگے۔ علی ہذا مثلث 'ا ب ج' کیلئے۔

شکل ف میں خطوط (ا) (ب) (ج) (د) ہم نقطہ ہیں اور اس کے جواب میں شکل ف میں نقطے (ا) (ب) (ج) (د) ہم خط ہوں گے۔

شکل ف میں خطوں کے ازواج (ب ج) (ج ج) (ج ل) (ج ل) (ا ب) (ا ب) کے نقاط تقاطع ہم خط ہیں اور اس کے جواب میں شکل ف میں نقطوں کے ازواج (ب ج) (ب ج) (ج ج) (ج ل) (ا ب) (ا ب) کو ملانے والے خطوط ہم نقطہ ہونگے۔

(222)

پس شکل ف کے مسئلہ کی مکافات حسب ذیل مسئلہ میں ہوتی ہے۔
اگر دو مثلث جنکے اضلاع علی الترتیب ا ب ج ، د ب ج ، د ب ج ہیں ایسے ہوں کہ نظیری اضلاع کے تین نقاط تقاطع ہم خط ہیں تو نظیری راسوں کو ملا کر خطوط یعنی (ا ب) اور (د ب) (ب ج) اور (ب ج) (ج ل) اور (ج ل) ہم نقطہ ہونگے۔



شکل ف

یہ دو مکافی مسئلے ایک دوسرے کے ساتھ حسب ذیل طریقہ پر بیان ہوئے ہیں

مثلاث جو منظرہ میں ہوں | ہم محور ثلثات منظرہ میں

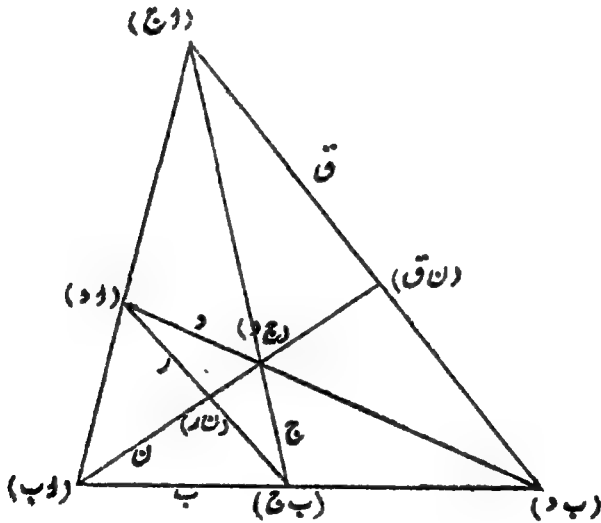
ہم محور ہوتے ہیں۔ | ہوتے ہیں۔

طائب علم بلاشبہ اس حقیقت سے آگاہ ہو چکا ہوگا کہ ایک ثلث جسے تین خطوں سے بنا ہوا سمجھا گیا ہے دوسرے ثلث میں جسے تین خطوں سے بنا ہوا سمجھا گیا ہو تنکافی نہیں ہوتا بلکہ ایک ایسے ثلث میں تنکافی ہوتا ہے جسے تین نقطوں سے بنا ہوا سمجھا گیا ہو، اور اسی طرح اس کے برعکس۔

۲۲۳۔ اب ہم چار ضلعی کی موسیقی خاصیت اور چار زاوی کی موسیقی خاصیت کو مکانات کے ذریعہ باہم مربوط کریں گے۔

فرض کرو کہ چار ضلعی کے خطوط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں اور ان کے جواب میں چار زاوی کے نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ہیں۔

228)

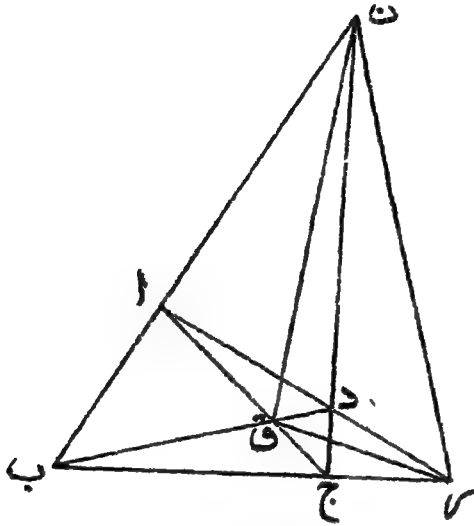


شکل ف

فرض کرو کہ (ا، ب) اور (ج، د) کو ملائیے الاخط ن ہے۔

۔۔ (ا، ج) اور (ب، د) ۔۔ ق ہے۔

فرض کرو کہ (د) اور (ب ج) کو ملائیوا لاط ر ہے۔



شکل ف

چار غلغلی کی موسیقی خاصیت علامتوں میں حسب ذیل ہے :

$$1 = \{ (ا ب) (ج د) ' (ن ر) (ن ق) \}$$

$$1 = \{ (ا د) (ب ج) ' (ن ر) (ق ر) \}$$

$$1 = \{ (ا ج) (ب د) ' (ن ق) (ق ر) \}$$

مکافات سے حاصل ہوتا ہے

$$1 = \{ (ا ب) (ج د) ' (ن ر) (ن ق) \}$$

$$1 = \{ (ا د) (ب ج) ' (ن ر) (ق ر) \}$$

$$1 = \{ (ا ج) (ب د) ' (ن ق) (ق ر) \}$$

اس لئے چار زاوئی کی حسب ذیل موسیقی خاصیت معلوم ہوتی ہے : ہر اس پروتری مثلث کے دو ضلع چار زاوئی کے ان دو ضلعوں کے

ساتھ موسیقی فردوج ہوتے ہیں جو اس راس میں سے گذرتے ہیں۔
طالب علم کو اب یہ معلوم ہوگا کہ کسی چار زاوی کے "وتری نقطے"
اُس چار ضلعی کے وتروں کے متکافی ہوتے ہیں جس سے چار زاوی اخذ کیا گیا
ہے۔ یہی وجہ ہے کہ اصطلاح "وتری نقطے" اختیار کی گئی ہے۔

۲۲۴۔ مسئلہ۔ ایک مخروطی کے لحاظ سے کسی درپنج سمت کا
متکافی ایک درپنج منسل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک خط n پر درپنج سمت

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، وغیرہ ہے۔

مکانات سے جو منسل حاصل ہوگی وہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، وغیرہ

ہوگی اور یہ منسل ایک نقطہ n میں سے گذرے گی۔

نیز $(۱، ۲، ۳، ۴) = (۱، ۲، ۳، ۴)$

اور $(۱، ۲، ۳، ۴) = (۱، ۲، ۳، ۴)$ دفعہ ۲۱۵ کی رو سے

لیکن $(۱، ۲، ۳، ۴) = (۱، ۲، ۳، ۴)$ دفعہ ۸، کی رو سے

$(۱، ۲، ۳، ۴) = (۱، ۲، ۳، ۴)$

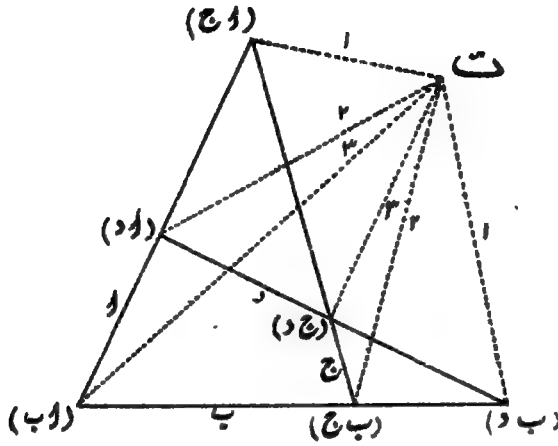
اس لئے یہ منسل درپنج میں ہے۔

۲۲۵۔ چار زاوی اور چار ضلعی کی درپنج خاصیت۔

مسئلہ۔ کوئی قاطع ایک چار زاوی کے متقابلہ اضلاع

کے ازواج کو ایسے نقطوں کے زوجوں پر قطع کرتا ہے جو درپنج میں

ہوتے ہیں۔



مسئلہ بالا کی مکافات سے حسب ذیل دوسرا مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

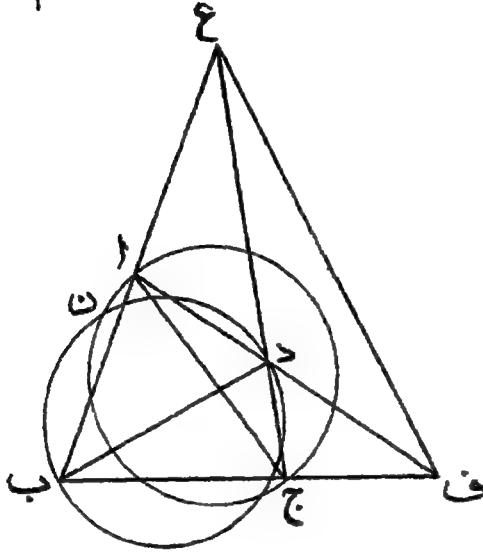
وہ خطوط جو کسی نقطہ کو ایک مکمل چار ضلعی کے متقابلہ راسوں

ازواج سے ملاتے ہیں ایک درپیش منسل بناتے ہیں۔
مثلاً ہماری شکل میں اگر ت کو جو قاطع ت کے جواب میں ہے راسوں
متقابلہ ازواج (ا ج)، (ب د)، (ج ا)، (د ب) سے ملایا جائے
تو ایک درپیش منسل حاصل ہوتی ہے۔

۲۲۶۔ مسئلہ۔ وہ دائرے جو ایک مکمل چار ضلعی کے

وتروں پر بنائے جائیں ہم محور ہوتے ہیں۔
فرض کرو کہ چار ضلعی کے اضلاع (ا ب)، (ب ج)، (ج د)، (د ا) ہیں۔
وتر (ا ج)، (ب د)، (ج ا)، (د ب) ہیں۔
فرض کرو کہ (ا ج) اور (ب د) کو قطر مکرر دائرے کہیں گے ہیں اور
ان دائروں کا ایک نقطہ تقاطع ن ہے۔

۳۔ ان ج اور بن د علی القوائم ہیں۔



لیکن 'ا' 'ن' 'ج' 'ب' 'ن' 'د' 'ع' 'ن' 'ف' پرچ
 میں ہیں (صفحہ ۲۲۵)۔

۵۰ دفعہ ۸۶ کی رو سے زاویہ $\angle F$ ایک قائمہ زاویہ ہے۔

۴ ف کو قطر مانکر کھینچا ہوا دائرہ ن میں سے گزرتا ہے۔
اسی طرح ۴ ف پر کا دائرہ 'ب د اور ج پر کے دائروں
دوسرے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔

یعنی یہ تین دائرے ہم محور ہیں۔

نتیجہ صریح - چار ضلعی کے تین و تروں کے نقاط وسطی ہم خط ہوتے ہیں۔

یہ اہم اور شہور خاصیت فوراً ماخوذ ہوتی ہے کیونکہ یہ تین وسطی نقطے

تین ہم محور دائروں کے مرکز ہیں۔

وہ خط جو ان تین وسطی نقطوں میں سے گزرتا ہے بعض اوقات

چار ضلعی کا قطر کہلاتا ہے۔

سے متعین ہوتا ہے۔
اس لئے اب ج د میں سے گزرنیوالے تمام مخروطی قاطعات کو
ایک ہی درجہ سے متعلقہ نقطوں کے ازدواج میں قطع کرینگے۔
نوٹ۔ دفعہ ۲۲۵ کا مسئلہ ڈیسارگ کے مسئلہ کی صرف ایک
خاص صورت ہے، اگر دو خطوں ا د، ب ج کو ان چار نقطوں میں سے
گزرنیوالے مخروطیوں میں سے ایک مخروطی سمجھا جائے۔

۲۲۸۔ ڈیسارگ کے مسئلہ کا متکافی حسب ذیل مسئلہ ہے۔
اگر مخروطی چار دائرے ہوئے خطوں کو مس کریں تو ان کے
مستوی کے کسی نقطہ سے کھینچے ہوئے مخروطیوں کے مماسوں کے
زوج ایک ہی درجہ پینل سے متعلق ہوتے ہیں یعنی اس پینل
سے جو ان چار خطوں سے بننے والے چار ضلعی کے متقابلہ راسوں
کے زوجوں کو تسکیرہ بالا نقطہ کے ساتھ ملائیے تو ان خطوں سمیت ہوتی ہے۔
۲۲۹۔ مکانات کا اطلاق مخروطیوں پر۔

اب ہم یہ سمجھائیے کہ مکانات کا اصول کس طرح مخروطیوں پر استعمال
کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ نقطہ ن، مخروطی خ کے مستوی میں ایک منحنی میں
رسم کرتا ہے تو خط ن جو مخروطی خ کے لحاظ سے ن کا قطبی ہے کسی
منحنی کو لف کرے گا جسے ہم من سے تعبیر کریں گے۔
پس من کے مماس، من پر۔ نقطوں کا جواب ہیں، لیکن یہ بھی
دہن نہیں رہے کہ من کے مماس، من پر کے نقطوں کا جواب ہونگے۔
کیونکہ فرض کرو کہ من، پر دو قریبی نقطے ن اور ن ہیں اور فرض کرو

انکے جواب میں خطوط ن اور ن ہیں۔ تو نقطہ (ن بن) خط (ن بن) کا جواب ہے۔
اب جیسے ن، ن تک حرکت کرتا ہے (ن بن) منحنی میں سے
نقطہ ن پر کا ماس بن جاتا ہے اور اسی اثناء میں (ن بن) اپنے لغاف کا
نقطہ ماس بن جاتا ہے۔

اسلئے ماس کے ماسوں کے جواب میں ماس کے نقطے ہیں۔

منحنیوں میں اور ماس میں سے ہر ایک کو مخروطی خ کے

لحاظ سے دوسرے منحنی کا قطبی متکافی کہتے ہیں۔

۲۳۰۔ مسئلہ۔ اگر ماس ایک مخروطی ہو تو ماس دوسرا

مخروطی ہو گا۔

فرض کرو کہ ماس پر چار ثابت نقطے (ا ب ج د) ہیں اور اسی

منحنی پر ن کوئی اور نقطہ ہے۔

تب (ن ا ب ج د) مستقل ہے۔

لیکن (ن ا ب ج د)

(229)

= { (ن ا) (ن ب) (ن ج) (ن د) } حسب فو ۲۱۵

∴ { (ن ا) (ن ب) (ن ج) (ن د) } مستقل ہے۔

∴ ن کا لغاف ایک مخروطی ہے جو (ا ب ج د) کو مس کرتا ہے

(دفعہ ۲۱۴)

∴ ماس ایک مخروطی ہے۔

اس اہم مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر بھی ثابت کیا جاسکتا ہے :-

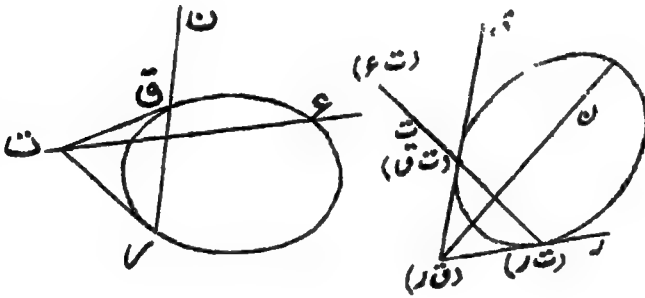
ماس ایک مخروطی ہونے کی وجہ سے دوسرے رتبہ کا ایک

منحنی ہے یعنی اس کے مستوی میں کے خطوط مستقیم اسکو دو اور صرف دو نقطوں
پر قطع کرتے ہیں خواہ یہ نقطے حقیقی ہوں یا خیالی۔

اس لئے میں دوسری جماعت (Class) کا ایک منحنی ہونا چاہئے یعنی ایسا منحنی کہ اس کے مستوی میں سے ہر نقطہ سے اس کے دو اور صرف دو مماس کھینچے جاسکتے ہوں۔ اسلئے میں ایک مخروطی ہے۔

۲۳۱۔ مسئلہ۔ اگر میں اور میں دو مخروطی ہوں جو مخروطی خ کے لحاظ سے ایک دوسرے کے متکافی ہیں تو میں کا قطب اور قطبی میں کے قطبی اور قطب کا جواب ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس۔

فرض کرو کہ میں کا قطب اور قطبی علی الترتیب ن اور ت ہیں [طالب علم کے لئے یہ ذہن نشین کر لینا نہایت اہم ہے کہ تاء میں کے لحاظ سے ن کا قطبی ہے نہ کہ خ کے لحاظ سے۔ خ کے لحاظ سے ن کا قطبی وہ خط ہے جسے ہم ن سے تعبیر کرتے ہیں]



فرض کرو کہ میں کا کوئی وتر ق را ہے جو ن میں سے گذرتا ہے تو ق اور را پر کے مماس خط ت ع پر ملینگے۔ فرض کرو کہ وہ نقطہ ت پر ملتے ہیں۔ اس لئے متکافی شکل میں ن اور (ت ع) اس طور پر مربوط ہو جائیگا۔

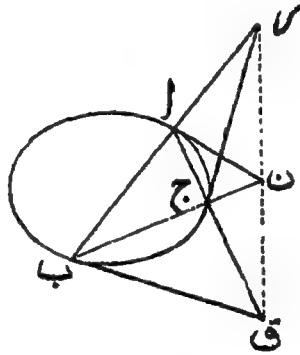
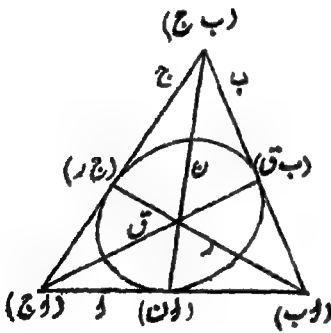
(280)

اگر ن پر کوئی نقطہ (ق ر) لیا جائے تو (ق ر) سے س کے مساوی کا
دو تاس ت (ت ۶) میں سے گزریگا۔

ن اور (ت ۶) س کے لمحات سے قطبی اور قطب ہیں۔
نتیجہ صریح ۱۔ س کے فردوج نقطوں کے متکافی، س کے فردوج
خطوط ہوتے ہیں اور اس کے بالعکس۔

نتیجہ صریح ۲۔ س کے ایک خود فردوج مثلث کا متکافی، س کا
ایک خود فردوج مثلث ہوتا ہے۔

۲۳۲۔ اب ہم چند متکافی مسئلے متوازی ستونوں میں بیان کریں گے۔
۱۔ اگر ایک مثلث (تین ضلعی شکل) میں ایک مخروطی بنایا جائے تو مثلث
کے راسوں کو متقابلہ اضلاع کے
نقاط تماس سے ملائیوئے خطوط
ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
۲۔ اگر ایک مثلث (تین نقطی شکل) کے گرد ایک مخروطی کھینچا جائے تو
مثلث کے اضلاع اور متقابلہ راسوں
پر کے مساویوں کے نقاط تقاطع ہم خط
ہوتے ہیں۔



۱۔ دو ثابت خط ایک مثلث کے
اضلاع کو جن چہ نقطوں پر قطع کرتے
ہیں ان کو متقابلہ راسوں سے

۲۔ دو ثابت نقطوں کو ایک مثلث
کے راسوں سے ملائیوئے خطوط
متقابلہ اضلاع کو جن چہ نقطوں پر

قطع کرتے ہیں وہ ایک مخروطی پر
واقع ہوتے ہیں۔
۳۔ ایک مخروطی پر کے چہ نقطہ کو
ملانے سے جو چہ ضلعی اشکال بنتی
ہیں انہیں سے ہر ایک کے متقابلہ
اشکال کے تین نقاط تقاطع ہم خط
ہوتے ہیں۔ پیا مکمل کا مسئلہ۔
۴۔ اگر ایک مخروطی ایک چار زوئی
کے گرد کھینچا جائے تو اسکے وتری نقطوں
جو شلٹ بنتا ہے وہ مخروطی کیلئے
خود مخروط ہوتا ہے۔
۵۔ اگر ایک مخروطی میں ایک مخروطی
کھینچا جائے تو اسکے وتروں سے جو شلٹ
بنتا ہے وہ مخروطی کے لئے خود مخروط
ہوتا ہے۔

۲۳۳۔ مسئلہ۔ مخروطی سے قطع ناقص، مکانی، یا زائد ہوگا
بموجب اس کے کہ رخ کا مرکز سے کے اندر سے پر یا سے کے
باہر ہو۔

کیونکہ رخ کا مرکز لاتنا ہی پر کے خط میں متکافی ہوتا ہے اور رخ کے
مرکز میں سے گزرنے والے خطوط ان نقطوں میں متکافی ہوتے ہیں جلاتنا ہی پر کے خط پر ہیں۔
اس لئے رخ کے مرکز سے سے کے ماس سے سے پلاتنا ہی پر کے
نقطوں میں متکافی ہونگے اور سے کے ان ماسوں کے نقاط ماس سے سے
کے متقاربوں میں متکافی ہونگے۔
پس اگر رخ کا مرکز سے سے کے باہر ہو تو سے سے کے دو حقیقی متقارب
ہونگے اور اس لئے سے سے قطع زائد ہوگا۔
اگر رخ کا مرکز سے سے پر ہو تو سے سے کا ایک متقارب ہوگا یعنی لاتنا ہی
پر کا خط۔ اس لئے سے سے قطع مکانی ہوگا۔

اگر χ کامرکز، ϕ سے کے اندر ہو تو ϕ کے کوئی تحقیقی متقارب نہیں ہونگے اور اسلئے ϕ سے قطع ناقص ہوگا۔

۲۳۲۔۔ وہ صورت جبکہ χ ایک دائرہ ہو۔

اگر امدادی یا بنیادی مخروطی χ ایک دائرہ ہو (ایسی صورت میں ہم اس دائرہ کو ϕ سے اور اسکے مرکز کو ϕ سے تعبیر کریں گے) تو اشکال ϕ اور ϕ میں ایک اور ربط موجود ہوتا ہے جو کسی اور طرح حاصل نہیں ہوتا۔

چونکہ دائرہ ϕ کے لحاظ سے کسی نقطہ ϕ کا قطبی ϕ و ϕ پر عمود ہوتا ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ شکل ϕ یا ϕ کے تمام خطوط شکل ϕ یا ϕ کے متناظر نقطوں کو ϕ سے ملانے والے خطوں پر عمود ہیں۔ پس ایک شکل میں کسی دو خطوں کا درمیانی زاویہ اس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو ϕ پر اس خط کے محاذی بنتا ہے جو دوسری شکل کے نظیری نقطوں کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔

بالخصوص یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر ϕ سے ϕ کے تماس علی التوا ϕ ہوں تو ϕ سے ایک قائم زاویہ ہوگا۔

کیونکہ اگر ϕ سے ϕ کے تماس ϕ اور ϕ ہوں تو ϕ کے متقارب، دائرہ ϕ کے لحاظ سے ϕ اور ϕ کے قطبی ہیں اور علی التوا ϕ ہیں کیونکہ ϕ اور ϕ ایک قائم زاویہ ہے۔

پس اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز ϕ پر ہو ایک قطع مکانی کی مکافات عمل میں آئے، یا اگر ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز ϕ پر ہو ایک دائرہ پر ہو ایک مرکز دار مخروطی کی مکافات عمل میں آئے تو ہمیشہ ایک قائم زاویہ حاصل ہوگا۔

نیز اسکا بھی مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ ایک مثلث جس کا مرکز عمودی ϕ پر ہو ایک دوسرے مثلث میں جس کا مرکز عمودی ϕ پر ہو تلبہ شکافی ہوتا ہے۔ اسکی تصدیق طالب علم خود کر لے۔

۲۳۵۔ اب یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ حسب ذیل دو مسئلے مکافات کے ذریعہ مربوط ہیں۔
۱۔ ایک ایسے مثلث کا مرکز عمودی جو ایک قطع مکانی کے گرد کھینچا گیا ہو مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۔ ایک ایسے مثلث کا مرکز عمودی جو ایک قائم زائد کے اندر کھینچا گیا ہو اسی قائم زائد پر واقع ہوتا ہے۔

یہ دو مسئلے دفعات ۹۵ اور ۱۳ میں بلا واسطہ ثابت کئے جا چکے ہیں۔
اب ہم یہ بتانے کے لئے دو مسئلے پہلے مسئلے سے مکافات کے ذریعہ کس طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔
فرض کرو کہ مسئلہ (۱) مسئلہ ہے۔

ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز و مثلث کے مرکز عمودی پر ہو
مکافات عمل میں لاؤ۔

اب قطع مکانی لاتنا ہی پر کے خط کو مس کرتا ہے۔ اس لئے لاتنا ہی پر کے خط کا قطب، بلحاظ دائرہ د کے، متکافی منحنی پر واقع ہوتا ہے یعنی نقطہ و متکافی منحنی پر واقع ہے۔

اور متکافی منحنی ایک قائم زائد ہے کیونکہ و، مکانی کے مرتب پر ہے۔
نیز و اس مثلث کا بھی مرکز عمودی ہے جو مکانی کو حائل کر نیوالے
مثلث کا متکافی ہے۔

اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک قائم زائد ایک مثلث کے گرد کھینچا جائے تو مرکز عمودی اس منحنی پر واقع ہوگا۔

نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ قائم زائد کے علاوہ کوئی اور مخروطی ایک
مثلث کے راسوں اور اس کے مرکز عمودی میں سے نہیں گزر سکتا۔

۲۳۶۔ مسئلہ۔ اگر س ایک دائرہ ہو اور اگر ہم ایک دائرہ د کے لحاظ سے جس کا مرکز و ہے مکافات کریں تو س ایک مخروطی ہوگا جس کا ایک ماسکہ و ہوگا۔

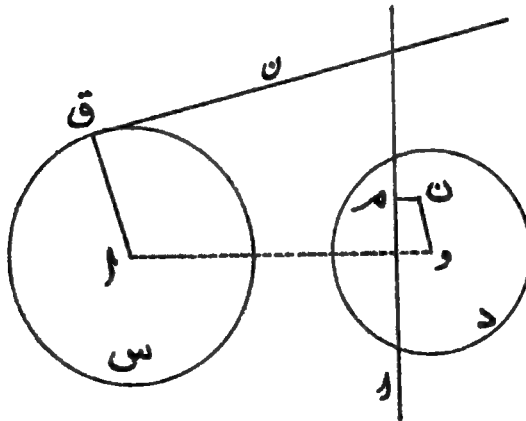
فرض کرو کہ س کا مرکز ا ہے۔
فرض کرو کہ س کا کوئی تماس ن ہے اور اس کا نقطہ تماس ق ہے۔
فرض کرو کہ دائرہ د کے لحاظ سے ن کا قطب ن ہے اور ا کا قطبی ا ہے۔

ن م، ا پر عمود کھینچو۔

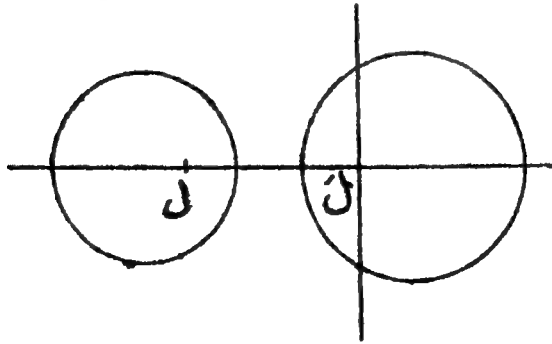
اب چونکہ اق، ن پر عمود ہے اس لئے ساسن کے مسئلہ (دفعہ ۱۴) (283) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ن م}{اق} = \frac{ون}{وا}$$

$$= \frac{ون}{ن م} = \frac{مستقل}{اق}$$



متکافی شکل میں ۱ کے جواب میں مرتب ۱ اور (ک ل) کے جواب میں اس شکل پر ایک نقطہ (ک ل) حاصل ہوتا ہے۔
 (ک ل) سے س کے ماس ک او۔ ل میں جو ک اور ل کے جواب میں ہیں اور ق کے جواب میں س کا ماس ق ہے۔
 اب (ق ک) اور (ق ل) علی القوائم ہیں۔
 اس لئے (ق ک) اور (ق ل) کو ملانے والا خط و پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے جو س کا ماسک ہے۔
 اس لئے متکافی مسئلہ یہ ہے کہ ایک مخروطی کے کسی ماس پر دو ماسوں کے درمیان کا مقطعہ جبکہ یہ دو ماس مرتب پر متقاطع ہوں ماسکہ پر ایک قائمہ زاویہ بناتا ہے۔
 ۲۳۸۔ مسئلہ۔ غیر قاطع ہم محور دائروں کے کسی نظام کو ہم ماسکی مخروطیوں میں متکافی کیا جاسکتا ہے۔
 فرض کرو کہ دائروں کے اس نظام کے انتہائی نقطے ل اور ل ہیں ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز ل پر ہو مکافات عمل میں لاؤ تو تمام دائرے مخروطیوں میں متکافی ہونگے جن کا ایک ماسک ل ہوگا۔



مزید بریں دائروں میں سے کسی ایک کے متکافی محروطی کا مرکز اس
دائرہ کے لحاظ سے لی کے قطبی کا متکافی ہوگا۔

لیکن لی کا قطبی تمام دائروں کے لئے ایک ہی ہے یعنی لی
میں سے گزرنیوالا وہ خط جو مرکزوں کے خط پر عمود ہے۔ (دفعہ ۲۲)

اس لئے تمام متکافی محروطی ایک مشترک مرکز رکھتے ہیں اور نیز ایک
مشترک ماسکہ۔

اس لئے وہ تمام ایک دوسرا مشترک ماسکہ بھی رکھتے ہیں یعنی وہ
ہم ماسکی ہیں۔

۲۳۔ ہم جانتے ہیں کہ اگر ہم محور نظام کے دو دائروں کا ایک مشترک
ماس ت ہو جو انہیں نقطوں ن اور ق پر مس کرے تو ن ق
کے محاذی لی پر ایک قائمہ زاویہ بنتا ہے۔

اب اسکی مکافات ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز لی پر ہو

عمل میں لاؤ۔ ہم محور نظام کے یہ دو دائرے ہم ماسکی محروطیوں میں متکافی ہونگے

مشترک ماس ت، ہم ماسکیوں کے ایک مشترک نقطہ میں متکافی ہوگا،

اور نقطے ن اور ق، اس مشترک نقطہ پر ہم ماسکیوں کے ماسوں میں متکافی ہونگے۔

اس لئے ہم ماسکی محروطی علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔

یہ نتیجہ مشہور ہے اور دوسرے طریقہ پر آسانی سے ثابت ہوتا ہے۔

لیکن ہم یہاں صرف مکافات کے اصولوں کی وضاحت کر رہے ہیں۔

۲۴۔ نیز یہ بھی معلوم ہے (دیکھو تیسریوں باب کی مثال ۴۰) کہ اگر مس

اور مس دو دائرے ہوں، ایک انتہائی نقطہ لی ہو، اور دائروں میں

اور مس پر علی الترتیب ن اور ق ایسے نقطے ہوں کہ ن لی ق ایک

قائمہ زاویہ ہو تو ن ق کا لفاف ایک محروطی ہے جسکا ایک ماسکہ لی پر ہے۔

اب اس خاصیت کی مکافات ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز

لی پر ہو عمل میں لاؤ۔ مس اور مس، ہم ماسکی محروطیوں میں متکافی ہوتے

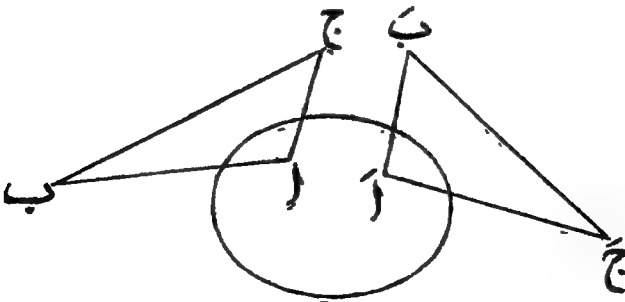
ہوتے ہیں جسکا ایک ماسکہ لی ہے، نقطے ن اور ق، مس اور مس

(236) کے ماسوں میں متکافی ہوتے ہیں یعنی ن اور ق میں جمع علی القوائم ہو گئے؛ اور خط (ن ق) نقطہ (ن ق) میں متکافی ہوتا ہے۔ چونکہ (ن ق) کا لفاف ایک مخروطی ہے جسکا ایک ماسک ل پر ہے اس لئے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ (ن ق) کا طریق ایک دائرہ ہے۔ پس حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر دو ہم ماسکی مخروطیوں میں سے ہر ایک کا ایک ایک ماس نقطہ ت سے کھینچا جائے اور یہ دو ماس باہم علی القوائم ہوں تو ت کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۲۴۱۔ ہم اس باب کو دو مسئلے ثابت کر نیلے بعد ختم کرینگے، ایک مسئلہ کا تعلق دو مثلثوں سے ہے جو ایک مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج ہوتے ہیں اور دوسرے کا تعلق ایسے دو مثلثوں سے ہے جو ایک مخروطی کے لحاظ سے متکافی ہوتے ہیں

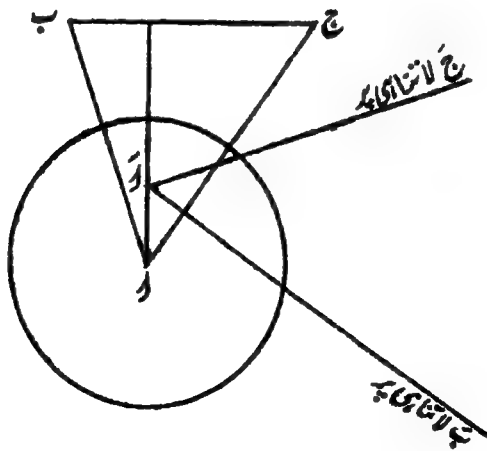
مسئلہ۔ اگر دو مثلث ایک ہی مخروطی کے لحاظ سے خود مزدوج ہوں تو ان کے چہ راس ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں اور انکے چہ ضلع ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں۔



گزرتا ہے کیونکہ ایک قائم زاؤ کے لاتنا ہی پر کے دو نقطوں کو ملائیوا لا خط کسی نقطہ پر ایک قائم زاویہ بنانا چاہئے۔
 اس لئے چہ نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہیں۔
 چہ نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' بھی ایک مخروطی پر واقع ہیں۔
 مسئلہ کا دوسرا حصہ اس ثابت شدہ حصہ کی مکافات سے فوراً حاصل ہوتا ہے۔

۲۴۲۔ مسئلہ۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے تنکافی ہوں تو وہ منظرہ میں ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو مثلث 'ا' 'ب' 'ج' اور 'ا' 'ب' 'ج' ایک مخروطی میں کے لحاظ سے تنکافی ہیں جسکا یہ مطلب ہے کہ 'ا' 'ب' 'ج' کا قطب ہے 'ا' 'ب' 'ج' کا قطب 'ا' اور 'ج' 'ا' 'ب' کا قطب اور اسلئے نیز 'ا' 'ب' 'ج' کا قطب ہے 'ا' 'ب' 'ج' کا قطب 'ا' اور 'ج' 'ا' 'ب' کا قطب۔



میں کو ایک دائرہ میں اور (ا) کو اس دائرہ کے مرکز میں منظر کر دو۔
 جب اور ج لاتنا ہی پر منظر ہوتے ہیں۔
 منظر میں چھوٹے حروف استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 'ا' 'ب' 'ج' پر عمود ہے کیونکہ 'ا' 'ب' 'ج' کا قطب ہے۔
 نیز چونکہ 'ب' 'ج' کا قطب ہے اس لئے 'ا' 'ب' 'ج' پر عمود ہے
 اور اس لئے 'ب' 'ج' 'ا' کے متوازی ہے اور 'ج' پر عمود ہے۔
 اسی طرح 'ج' 'ا' 'ب' پر عمود ہے۔
 'ا' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' کے مرکز عمودی ہیں
 'ا' 'ب' 'ج' 'ا' 'ب' 'ج' ہم نقطہ ہیں۔

مثالیں

- ۱۔ اگر مخروطی 'س' اور 'م'، مخروطی 'خ' کے لحاظ سے متکافی قطبی ہوں تو 'س' کا مرکز 'م' کے لحاظ سے 'خ' کے مرکز کے قطبی کا جواب ہوگا۔
- ۲۔ متوازی خطوط ایسے نقطوں میں متکافی ہوتے ہیں جو بنیادی مخروطی 'خ' کے مرکز کے ساتھ ہم خط ہوتے ہیں۔
- ۳۔ ثابت کرو کہ ایک چار زوئی کو ایک متوازی الاضلاع میں متکافی کیا جاسکتا ہے۔
- ۴۔ کسی مخروطی کے لحاظ سے حسب ذیل مسئلہ کا متکافی مسئلہ معلوم کرو:-
 ان مخروطیوں کے لحاظ سے جو چار ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں ایک
 دئے ہوئے خط کے قطبوں کا طریق ایک مخروطی ہوتا ہے۔
 مسئلہ ۵ تا ۱۲ کو ایک دائرہ کے لحاظ سے متکافی کرو۔
- ۵۔ مثلث کے راسوں سے متقابل اضلاع پر عمود ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
- ۶۔ دائرہ کا مماس اس نصف قطر پر عمود ہوتا ہے جو نقطہ تماس میں سے گزرتا ہے۔
- ۷۔ ایک ہی قطعہ دائرہ کے اندر کے زاوے مساوی ہوتے ہیں۔

- ۸۔ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے کسی چار ضلعی کے متقابلہ زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ہوتا ہے۔
- ۹۔ ایک دائرہ کے کسی نقطہ پر کے مماس اور اس نقطہ میں سے گزرنے والے کسی وتر کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے وہ متبادل قطعہ دائرہ کے اندر کے زاویے کے مساوی ہوتا ہے۔
- ۱۰۔ ایک دائرہ کے لحاظ سے کسی نقطہ کا قطبی اس خط پر عمود ہوتا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملتا ہے۔
- ۱۱۔ ایک دائرہ کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق جبکہ مماس ایک دئے ہوئے زاویے پر قطع کریں ایک ہم مرکز دائرہ ہوتا ہے۔
- ۱۲۔ ایک دائرہ کے وتر جن کے محاذی مرکز پر ایک مستقل زاویہ بنے ایک ہم مرکز دائرہ کو لے کرتے ہیں۔
- ۱۳۔ ثابت کرو کہ دو مخروطی جو دہرا مماس رکھتے ہوں دہرا مماس رکھنے والے مخروطیوں میں متکافی ہونگے۔
- ۱۴۔ ایک دائرہ میں کو ایک دائرہ ج کے لحاظ سے ایک مخروطی میں متکافی کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ج کا نصف قطر، م کے نصف قطر اور م کے نیم وتر خاص کے درمیان ہندسی اوسط ہے۔
- ۱۵۔ ثابت کرو کہ ایک دئے ہوئے نقطہ کو ماسکہ مانکر چار مخروطی کھینچے جائیں جو ایک دئے ہوئے دائرہ کو محیط کریں اور نیز یہ ثابت کرو کہ ان مخروطیوں میں سے تین مخروطیوں کے وتر خاص کا مجموعہ چوتھے مخروطی کے وتر خاص کے مساوی ہوگا۔
- ۱۶۔ چند مخروطی، ایک ماسکہ اور مماسوں کا ایک زوج مشترک رکھتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نظیری مرتب ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں گے اور تمام مرکز ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہونگے۔
- ۱۷۔ ایک دائرہ کا مرکز م ہے، اس دائرہ کے لحاظ سے مکانات کا عمل کر کے حسب ذیل مسئلہ ثابت کرو: اگر ایک مثلث (ب ج) ایک قطع مکانی کو

محیط کرے جبکہ ماسکے میں ہے تو 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گزرنیوالے وہ خطوط جو علی الترتیب میں 'ا' 'ب' 'ج' پر عمود ہوں ہم نقطہ ہونگے

۱۸۔ چند مخروطی کھینچے گئے ہیں جبکہ ایک ماسکے ایک ثابت نقطہ میں ہے اور یہ مخروطی اسے ہیں کہ دو ثابت نقطوں سے ان کے چار ماسوں میں سے ہر ماس 'م' پر دی ہوئی مقدار کا ایک ہی زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ مرتبہ جو 'م' کے جواب میں ہیں ایک ثابت نقطہ 'م' میں سے گزرتے ہیں۔

۱۹۔ دو قطعات مکانی کے مشترک ماس پر و کوئی نقطہ ہے اور ان مکافیوں کا ماسکے ایک ہی ہے۔ ثابت کرو کہ و سے مکافیوں کے دوسرے ماسوں کے درمیان ایسا زاویہ بنتا ہے جو مکافیوں کے محوروں کے درمیان زاویہ کے مساوی ہے

۲۰۔ ایک مخروطی 'ثلث' 'ا' 'ب' 'ج' کو حائل کرتا ہے اور اس کا ماسکے مثلث کے مرکز عمودی 'ع' پر ہے۔ ثابت کرو کہ نظیری مرتب 'ن' 'ع' پر عمود ہے اور اسے ایک ایسے نقطہ 'لا' پر ملتا ہے کہ $لا ع \times ع ن = لا ع \times ع د$ جہاں مثلث کے اندرونی دائرہ کا مرکز 'ن' ہے اور 'ا' سے 'ب' 'ج' پر کے عمود کا پائین 'د' ہے۔ یہ بھی بتلاؤ کہ مخروطی کا مرکز کس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی کے وزنچکے محاذی مخروطی کے ایک دئے ہوئے نقطہ پر ایک متقل زاویہ بنے ایک مخروطی کو لف کرینگے۔

[ایک دائرہ کے ذریعہ جبکہ مرکز دئے ہوئے نقطہ پر ہو مخروطی کو ایک مکانی میں متکافی کرو]

۲۲۔ اگر ایک مثلث کو ایک دائرہ کے لحاظ سے جبکہ مرکز و، مثلث کے دالط دائرہ پر ہے متکافی کیا جائے تو نقطہ و، متکافی مثلث کے حائل دائرہ پر بھی واقع ہوگا۔

۲۳۔ حسب ذیل نتیجہ ثابت کرو اور اس سے مکافات کے ذریعہ ایک مسئلہ حاصل کرو جس کا اطلاق ہم محور دائروں پر ہو۔ اگر کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی مخروطیوں میں 'ا' اور میں 'ب' کے ماس 'ن' 'ن' اور 'ق' 'ق' کھینچے جائیں تو 'ن' اور 'ق' کا درمیانی زاویہ 'ن' اور 'ق' کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے

- ۲۴۔ حسب ذیل نتیجہ ثابت کرو اور کسی مخروطی کے لحاظ سے اُسے مشکافی کرو۔
اگر A ب J ایک مثلث ہو اور اگر کسی مخروطی کے لحاظ سے A ب J کے قطبی متقابلہ اضلاع سے N ، Q ، S پر ہیں تو N ، Q ، S ہم خط ہوتے ہیں۔
- ۲۵۔ ایک ثابت نقطہ O کو جو ایک دئے ہوئے دائرہ کے مستوی میں ہے دائرہ کے کسی قطر کے سروں A اور B سے ملایا گیا ہے۔ O اور B دائرہ سے مکرر N اور Q پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ N اور Q پر کے مماس ایک ثابت خط پر جو O کے قطبی کے متوازی ہے متقاطع ہوتے ہیں۔
- ۲۶۔ ثابت کرو کہ چار ثابت نقطوں میں سے گزرنیوالے تمام مخروطیوں کو قائم زائدوں میں منسلک کیا جاسکتا ہے۔
- ۲۷۔ اگر دو مثلث ایک مخروطی کے لحاظ سے مشکافی ہوں (صفحہ ۲۴۲) تو ان کے منظرہ کا مرکز مخروطی کے لحاظ سے منظرہ کے محور کا قطب ہوتا ہے۔
- ۲۸۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے ان دوتوں کا لٹاف جنگے محاذی مرکز پر ایک قائمہ زاویہ بنے ایک ہم مرکز دائرہ ہوتا ہے۔
- [ایک دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز قطع ناقص کے مرکز پر ہو مکافات عمل میں لاؤ]
- ۲۹۔ A ب J ایک مثلث ہے اور اس کا اندرونی مرکز H ہے۔ اندرونی دائرہ ضلعوں کو A ب، J پر سے کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو H کو A ب، J ب، J ج، A ج، A ب، J ب کے مشترک نقطہ سے ملاتا ہے اس خط پر عود ہے جو B ج، J ب، J ج، A ج، A ب، J ب کے تین ہم خط نقاط تقاطع کو ملانے سے حاصل ہوتا ہے۔
- [مثال ۲۷ استعمال کرو]

اٹھارواں باب

دائرہ نقطے - مخروطیوں کے ماسکے

(242)

۲۴۳۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہم نقطہ خطوط کے ازواج جو ایک مخروطی کے لحاظ سے مزدوج ہوں ایک درپچ بناتے ہیں اور ان خطوط کے مشترک نقطہ سے مخروطی کے ماس دہرے خطوط ہوتے ہیں۔

پس کسی مخروطی کے مزدوج قطر درپچ میں ہوتے ہیں اور درپچ کے دوہرے خطوط مخروطی کے متقارب ہوتے ہیں۔

لیکن کسی دائرے کے مزدوج قطر علی القوام ہوتے ہیں۔

اس لئے کسی دائرہ کے متقارب اس کے مرکز پر کے قائم درپچ کے خیالی دہرے خطوط ہوتے ہیں۔

لیکن کسی نقطہ پر کے قائم درپچ کے دوہرے خطوط صریحاً کسی دوسرے نقطہ پر کے قائم درپچ کے دوہرے خطوط کے متوازی ہونے چاہئیں کیونکہ ہم گردش کے بغیر صرف حرکت انتقال کے ذریعہ ایک نقطہ کو کسی دوسرے نقطہ کے محل میں لا سکتے ہیں۔

اس لئے ایک دائرہ کے متقارب اسی مستوی کے کسی دوسرے دائرے کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک دائرہ ج کے متقارب د' ب ہیں اور دوسرے

دائرہ ج کے متقارب، 'ا'، 'ب' تو چونکہ 'ا'، 'ب' متوازی ہیں اس لئے وہ لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں اور چونکہ 'ب'، 'ب' متوازی ہیں اس لئے وہ بھی لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں۔

لیکن 'ا' اور 'ا'، 'ج' اور 'ج' سے لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں۔ اور 'ب' اور 'ب'، 'ج' اور 'ج' سے لاتناہی پر کے خط پر ملتے ہیں۔ اس لئے 'ج' اور 'ج'، 'ج' اور 'ج' سے لاتناہی پر کے خط کے وہی دو خیالی نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔

غرض ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک مستوی میں کے سب دائرے لاتناہی پر کے خط کے وہی دو خیالی نقطوں میں سے گذرتے ہیں۔ ان دو نقطوں کو لاتناہی پر کے دائری نقطے یا صرف دائری نقطے

کہا جاتا ہے۔

(243) کسی نقطہ پر دائری خطوط وہ خطوط ہوتے ہیں جو اس نقطہ کو لاتناہی پر کے دائری نقطوں سے ملاتے ہیں اور وہ اس نقطہ پر قائم درجہ کے خیالی دو ٹہرے خطوط ہوتے ہیں۔

۲۴۴ - تحلیلی نقطہ نظر سے -

دائری خطوط پر تحلیلی نقطہ نظر سے غور کرنا طالب علم کے لئے مفید ہوگا اگرچہ یہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔
دائرہ کی مساوات اس کے مرکز کے حوالہ سے حسب ذیل ہے

$$x^2 + y^2 = r^2$$

اس دائرہ کے متقارب

$$x^2 + y^2 = 0$$

ہیں یعنی حسب ذیل خیالی خطوں

$$x = 0 \text{ یا } y = 0$$

کا زوج ہیں۔

یہ دو خطوط دائرہ کے مرکز پر دائری خطوط ہیں۔

وہ نقطے جن پر یہ دائری خطوط لاتنا ہی پر کے خط سے ملتے ہیں دائری

نقطے ہیں۔

اگر ہم دائرہ کے مرکز پر محدودوں کے محوروں کو کسی زاویے میں
کھائیں اور انہیں علی القوام ہی رکھیں تو دائرہ کی مساوات شکل میں نہیں
بدلتی اور اس لئے متقارب بنے اور پراگنے دونوں محوروں کے ساتھ
وہی زاویے مس (خ) اور مس (خ) بنائینگے۔

یہ پہلی نظر میں مغالطہ آئیز معلوم ہوگا۔ لیکن اس مغالطہ کی وجہ
اس واقعہ سے ہوتی ہے کہ خط ما = خ لا، مستوی میں کے ہر خط کے ساتھ
وہی زاویہ مس (خ) بناتا ہے۔

کیونکہ فرض کر کہ ما = م لا، مبدا میں سے گزرنیوالا کوئی اور خط ہے۔
تب خط ما = خ لا جو زاویہ اس خط کے ساتھ بناتا ہے وہ

$$\text{مس (خ)} = \text{مس} \left\{ \frac{\text{خ} (1 + \text{خ م})}{1 + \text{خ م}} \right\} = \text{مس (خ)}$$

ہے جبکہ اس زاویہ کی پیمائش ما = م لا سے مثبت جہت میں کی گئی ہو۔

۲۴۵۔ مسئلہ۔ اگر اوب، مستقل مقدار کا ایک زاویہ ہو

اور سا، سا دائری نقطے ہوں تو سیل و (سا، سا، اوب) کی

چلیبی نسبتیں مستقل ہوتی ہیں۔

کیونکہ

(244)

$$\text{و (سا، سا، اوب)} = \frac{\text{جب سا و سا جب اوب}}{\text{جب سا و جب اوب سا}}$$

لیکن زاویے سا و سا، سا و ب، ا و سا سب کے سب مستقل ہیں

کیونکہ دائری خطوط مستوی میں کے ہر خط کے ساتھ ایک ہی زاویہ بناتے ہیں اور بموجب فرض زاویہ \angle و ب مستقل ہے، اس لئے
و (سا سا) \angle ب) مستقل ہے۔

۲۴۶۔ مسئلہ۔ وہ سب مخروطی جو دائری نقطوں میں گزریں دائرے ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ مخروطی میں کامرکز ج ہے اور وہ دائری نقطوں میں اور میں سے گزرتا ہے۔

اب ج سا اور ج سا میں کے متقابل ہیں۔
لیکن متقاربات اس درپچ کے دہرے خطوط ہوتے ہیں جو مزدوج قطروں کے زو جوں سے بنتی ہے۔ اور دہرے خطوط کسی درپچ کو پوری طرح متعین کرتے ہیں یعنی دئے ہوئے دہرے خطوط رکھنے والا صرف ایک ہی درپچ ہو سکتا ہے۔
پس میں کے مزدوج قطر سب کے سب علی القوائم ہیں۔
اس لئے میں ایک دائرہ ہے۔

دو یا دو سے زیادہ ثابت نقطوں میں سے گذر نیوالے
مخروطیوں کے خواص ثابت کرنے میں دائری نقطوں سے
استفادہ کیا جاسکتا ہے۔

کیونکہ مخروطیوں کا کوئی نظام جبکہ سب مخروطی و بی دو نقطوں میں گزریں ایک ساتھ دائروں میں مغلل کئے جاسکتے ہیں اور یہ اس طرح کیا جاسکتا ہے کہ ان دو نقطوں کو ظل کے مستوی پر دائری نقطوں میں مغلل کیا جائے تو مخروطیوں کے ظل اس نئے مستوی میں دائری نقطوں میں سے گذریں گے اور اس لئے وہ سب دائرے ہوں گے۔

طالب علم بلاشبہ اس سے آگاہ ہوگا کہ ایسی تطویل صرف خیالی ہے۔
 ۲۴۷۔ اب ہم دائری نقطوں کے استعمال کی ایک مثال دینگے۔
 یہ فوراً دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ کوئی قاطع ہم محور دائروں کے کسی نظام
 سے نقطوں کے ایسے ازدواج میں منقطع ہوتا ہے جو درپچ میں ہوتے ہیں
 (اس درپچ کا مرکز وہ نقطہ ہے جو قاطع اور نظام کے محور کا نقطہ تقاطع ہے)۔
 اس سے ڈیسارگ (Desargues) کا - - - فوراً ماخوذ ہوتا
 ہے یعنی چار نقطوں میں سے گزرنیوالے مخروطی کسی قاطع کو نقطوں کے ایسے
 ازدواج میں قطع کرتے ہیں جو درپچ میں ہوتے ہیں۔
 کیونکہ اگر ہم انہیں سے دو نقطوں کو دائری نقطوں میں منظر کریں تو
 سب مخروطی دائرے ہو جاتے ہیں۔ مزید بریں یہ دائرے ایک ہم محور
 نظام بناتے ہیں کیونکہ وہ دوسرے دو نقطے بھی مشترک رکھتے ہیں۔
 پس ڈیسارگ کا مسئلہ ہم محور دائروں کی درپچ خاصیت سے ماخوذ
 ہوتا ہے۔

(245)

نیز ہم محور دائروں کی درپچ خاصیت ڈیسارگ کے مسئلہ کی ایک
 خاص صورت بھی ہے کیونکہ ہم محور دائرے چار نقطے مشترک رکھتے ہیں جنہیں
 سے دو دائری نقطے ہوتے ہیں اور دو وہ نقطے جہاں تمام دائرے نظام
 کے محور سے منقطع ہوتے ہیں۔
 ۲۴۸۔ اب ہم حسب ذیل مسئلہ کے ثبوت میں دائری نقطوں سے
 استفادہ کریں گے۔

اگر ایک مثلث ایک قائم زائد کے لحاظ سے خود مزدوج
 ہو تو اس کا محیط دائرہ زائد کے مرکز میں سے گزریگا۔
 فرض کرو کہ قائم زائد کا مرکز و ہے، اب ج خود مزدوج مثلث
 ہے اور سا، سا دائری نقطے ہیں۔
 اب مثلث و سا سا، قائم زائد کے لحاظ سے خود مزدوج مثلث ہے

کیونکہ و سا اور و سا کو پر کے اس قائم درجہ کے دوسرے خطوط ہیں جس
متقاربات متعلق ہیں کیونکہ یہ متقاربات علی القوائم ہیں۔ اس لئے و سا
و سا اس درجہ سے متعلق ہیں جس کے دوسرے خطوط متقاربات میں
(دفعہ ۸۲) یعنی وہ درجہ جو و میں سے گزرنیوالے مزدوج خطوں کے
زوجوں سے بنتا ہے۔

۱۔ و سا اور و سا مزدوج خطوط ہیں اور نقطہ و لانا ہی پر کے
خط و سا کا قطب ہے۔

۲۔ و سا سا ایک خود مزدوج مثلث ہے۔

نیز ا ب ج ایک خود مزدوج مثلث ہے۔
۳۔ چھ نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'و' 'سا' 'سب' کے سب ایک
مخروطی پر واقع ہیں (دفعہ ۲۷۱) اور یہ مخروطی ایک دائرہ ہے کیونکہ وہ
سا اور سا میں سے گزرتا ہے۔
۴۔ 'ا' 'ب' 'ج' 'و' ہم دائری ہیں۔

نتیجہ صریح۔ اگر ایک قائم زاہد ایک مثلث کو محیط کرے تو
اس کا مرکز نقطہ قطبی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

میشہور مسئلہ مذکورہ بالا مسئلہ کی ایک خاص صورت ہے کیونکہ
مثلث پائین قائم زاہد کے لحاظ سے خود مزدوج ہے۔ (مثال ۲۱ پر ملاحظہ فرمائیں)

۲۷۹۔ مسئلہ۔ ہم مرکز دائرے لانا ہی پر دو ہر اس کے کہتے ہیں (246)

کیونکہ اگر دائروں کا مرکز و ہو اور لانا ہی پر دائری نقطے و سا اور
سا سوں تو سب دائرے و سا اور و سا کو نقطوں و سا اور و سا پر
مس کرتے ہیں۔

یعنی سب دائرے ایک دوسرے کو نقطوں و سا اور و سا پر
کرتے ہیں۔

۲۵۰ - مخروطیوں کے ماسکے۔

مسئلہ - ہر مخروطی کے چار ماسکے ہوتے ہیں جنہیں سے دو، مخروطی کے ایک محور پر واقع ہوتے ہیں اور حقیقی ہوتے ہیں اور دو، دوسرے محور پر واقع ہوتے ہیں اور خیالی ہوتے ہیں۔ چونکہ ایک ماسکہ پر کے مزدوج خطوط ایک قائم در پیچ بناتے ہیں اور چونکہ کسی نقطہ سے مخروطی کے ماس اس در پیچ کے دوسرے خطوط ہوتے ہیں جو وہاں مزدوج خطوط سے بنتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ماسکہ میں سے گزرنیوالے دائری خطوط اس نقطہ سے مخروطی کے ماس ہیں۔ لیکن کسی نقطہ پر کے دوسرے خطوط دائری نقطوں سا اور سا میں سے گزرتے ہیں۔

پس مخروطی کے ماسکے، سا اور سا سے مخروطی کے ماس کھینچنے اور ان کے چار نقاط تقاطع لینے سے حاصل ہونگے۔

اس لئے چار ماسکے ہوتے ہیں۔ اسکو ٹھیک طور پر ذہن نشین کرنے کے لئے ایک شکل بناؤ گویا کہ سا اور سا حقیقی نقطے ہیں۔

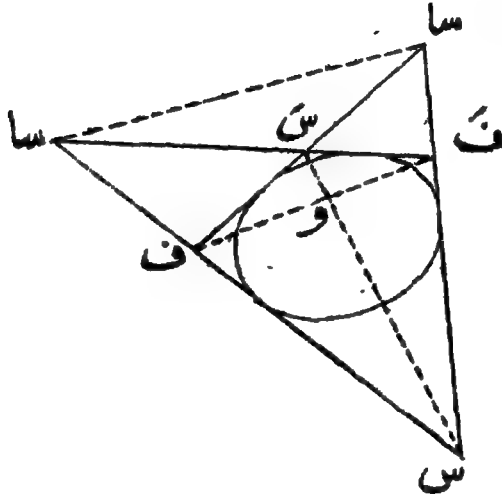
ان نقطوں سے مخروطی کے ماس کھینچو اور فرض کرو کہ حسب شکل ان کے نقاط تقاطع س، س، ف، ف میں جہاں س اور س متقابلہ راس اور ف اور ف متقابلہ راس ہیں۔ (دفعہ ۱۱۹، ۱ کا شکافی)۔

∴ سا سا کا قطب و ہے یعنی لاتنا ہی پر کے خط کا قطب و ہے۔
∴ و، مخروطی کا مرکز ہے۔

نیز و سا سا، چار زاوی س س ف ف کا وتر یا مسقطی مثلث ہے۔

∴ و (سا سا، ف س) - ۱ - (دفعہ ۶۶)

۱: وف اور وس مزدوج خطوط ہیں جن کے درمیان میں دسا
اور وسادہ ہرے خطوط ہیں۔
۲: وف اور وس علی القوائم ہیں۔



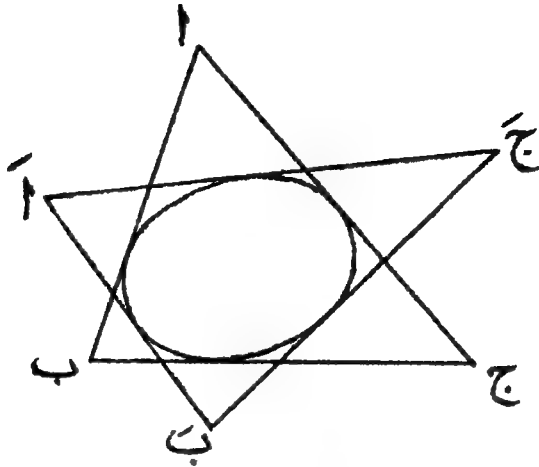
نیز وف اور وس، مخروطی کے لحاظ سے مزدوج خطوط ہیں
کیونکہ دونوں 'ف'، 'س'، 'سا' سے بننے والی اشکلت مخروطی
کے لحاظ سے خود مزدوج ہے، اور ویسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں مرکز ہے۔
۱: وف اور وس قائم مزدوج قطر ہونے کی وجہ سے، محاذ ہیں
اس طرح ماسکوں کے مزدوج ہیں، ایک ایک محور پر اور دوسرا دوسرا

محور پر۔

اب ہم جانتے ہیں کہ دوسرے فرض کرو وس اور س، حقیقی ہو جائیں
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دوسرے دوسرے 'ف' اور 'ف' خیالی
ہیں۔ کیونکہ اگر 'ف' حقیقی ہوتا تو خط 'ف'، 'سا' ہی پر کے خط سے
ایک حقیقی نقطہ پر ملتا اور ایسا نہیں ہے۔

۲۵۱۔ مسئلہ - مخروطیوں کا کوئی نظام جو ایک چار ضلعی کے ضلعوں نوے کرے ہم ماسکی مخروطیوں میں منظر کیا جاسکتا ہے فرض کرو کہ ا ب ج د چار ضلعی ہے جس میں متقابلہ راسوں کے درج (ا ج اور ب د) اور (ب ج اور د ا) کے درج کے مستوی پر لاتنا ہی پر دائری نقطوں میں منظر کرو۔
 ا ج اور ب د کے درج ۲۵۰ درجہ میں مخروطیوں کے ماسکوں میں منظر ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح - ہم ماسکی مخروطیوں کا ایک ایسا نظام بناتے ہیں جو چار خطوں کو مس کرتے ہیں۔
 ۲۵۲۔ اب ہم حسب ذیل مسئلہ کو جو غیر ہم نہیں ہے ثابت کرتے ہیں اس باب کے نتیجوں سے استفادہ کریں گے۔
 اگر دو مثلثوں کے اضلاع سب کے سب ایک ہی مخروطی نوے کریں تو ان مثلثوں کے چہرہ راس سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہوں گے۔
 فرض کرو کہ ا ب ج اور ا ب ج دو مثلث ہیں جن کے سب اضلاع ایک ہی مخروطی میں کو مس کرتے ہیں۔
 ظل کے مستوی میں پردائری نقطوں کو سہ سہ سے تعبیر کرو۔



ب اور ج کو سہ اور سہ میں مظلل کرو :۔ اس ایک قطع مکانی میں
 مظلل ہوتا ہے کیونکہ اس کا ظل لاتنا ہی پر کے خط کو سس کرتا ہے ۔
 نیز 'ا' قطع مکانی کے ماسکہ میں مظلل ہوگا کیونکہ ماسکہ سے ماسہ دائری
 نقطوں میں سے گزرتے ہیں ۔
 249) ظل میں متناظر چھوٹے حروف استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
 'ا'، 'و'، 'ب'، 'ج' ہم دائری ہیں کیونکہ کسی مثلث کا حائط دائرہ جبکہ مثلث ایک
 قطع مکانی کو سس کرے ماسکہ میں سے گزرتا ہے ۔
 :۔ 'ا'، 'و'، 'ب'، 'ج'، 'سہ'، 'سہ' ایک دائرہ پر واقع ہیں ۔
 :۔ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مخروطی پر واقع ہیں ۔
 مسئلہ بالا کا عکس مکافات کے ذریعہ فوراً مستنبط ہوتا ہے ۔
 ۲۵۳۔ ہم نے دفعہ ماسبق میں اس عام مسئلہ کا ثبوت دیا ہے
 کہ اگر دو مثلثوں کے اضلاع ایک مخروطی کو سس کریں تو ان کے چہ راس
 ایک دوسرے مخروطی پر واقع ہوتے ہیں اس مسئلہ کے ثبوت میں ہم نے
 ایک مسئلہ کی مدد ظل میں لی تھی جو یہ ہے کہ ایک مثلث کا حائط دائرہ
 جسے ضلع ایک قطع مکانی کو سس کریں ماسکہ میں سے گزرتا ہے ۔

اس عمل کو ظل کے ذریعہ تعمیم کرنا کہتے ہیں۔ ہم اسکی مزید وضاحت

مثالوں کے ذریعہ کریں گے۔
۲۵۴۔ فرض کرو کہ مستوی س میں دائری نقطے مسا، مسا سے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کے ظل مستوی س پر سے مسا سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب یقیناً سے اور سے، مستوی س میں دائری نقطے نہیں ہیں۔ لیکن مستوی س میں اور ظل کے واسطے مناسب انتخاب سے سے اور سے حسب منشاء کوئی دو حقیقی یا خیالی نقطے ہو سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر ہم نقطوں مسا اور مسا کو قضا میں نقطوں سے اور سے میں مظل کرنا چاہیں تو صرف یہ کرنا ہوگا کہ خطوط سے مسا اور سے مسا کے نقطہ تقاطع کو ظل کا واسطے اور سے میں سے گزرنے والے کسی مستوی کو مستوی س میں لیا جائے۔

۲۵۵۔ مستویوں س اور س کی شکلوں میں جبکہ مسا اور مسا کو سے اور سے میں مظل کیا گیا ہو حسب ذیل امتیازی خاصیتیں پائی جاتی ہیں۔
۱۔ مستوی س کے دائرے مستوی س پر مخروطیوں میں مظل ہوتے ہیں اور یہ مخروطی نقطوں سے اور سے میں سے گزرتے ہیں۔
۲۔ مستوی س کے قطعات مکانی مستوی س پر مخروطیوں میں مظل ہوتے ہیں اور یہ مخروطی خط سے سے کو مس کرتے ہیں۔
۳۔ مستوی س کے قائم زائد جن کے لئے ہم دیکھ چکے ہیں کہ مسا اور مسا مزدوج نقطے ہیں مخروطیوں میں مظل ہوتے ہیں اور ان مخروطیوں میں سے اور سے مزدوج نقطے ہوتے ہیں۔

۴۔ مستوی س میں کسی مخروطی کا مرکز، مستوی س پر خط سے سے کے قطب میں مظل ہوتا ہے کیونکہ وہ مسا مسا کا قطب ہے۔

۵۔ مستوی س کے ہم مرکز دائرے مخروطیوں میں مظل ہوتے ہیں اور یہ مخروطی مستوی س میں سے اور سے پر دو ہر استاس رکھتے ہیں۔
۶۔ مستوی س میں علی القوائم خطوں و ا، و ب کا کوئی زوج

مستوی میں پر خطوں دا، و ب کے ایک زوج میں مظلل ہوتا ہے جو د سہ، و سہ کے ساتھ موسیقی طور پر مزدوج ہوتا ہے۔ یہ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ و سا اور و سا اس درجے کے دوسرے خطوط ہیں جن سے و ا اور و ب متعلق ہیں اور اسلئے و (ا ب سا سا) = ا - ۱ (دفعہ ۸۲) اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ و (ا ب سا سہ) = ا - ۱۔
۷۔ مستوی س کا کوئی مخروطی جس کا ماسکہ م ہو ایک مخروطی میں مظلل ہوگا جو مستوی س میں خطوط م سہ اور م سہ کو مس کریگا۔
اور مستوی س کے مخروطی کے دو ماسکے م اور م، اس چار منطقی کے واسوں میں مظلل ہوں گے جو مستوی س میں مخروطی کے ظل کے ماس سہ اور سہ سے گھنٹنے سے بنتا ہے۔

۲۵۶۔ طالب علم کو اس حقیقت سے واقف ہونا چاہئے کہ سہ اور سہ، مستوی س میں دائری نقطے نہیں ہیں جبکہ وہ سا اور سا کے ظل ہوں۔

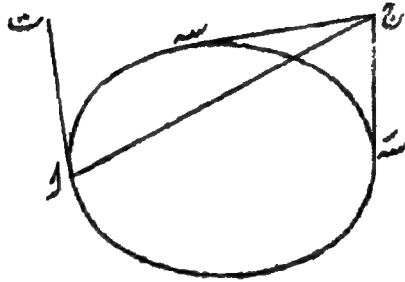
دفعہ ۲۵۲ میں ہم نے مستوی س کے دائری نقطوں کو سہ اور سہ سے تعبیر کیا ہے لیکن وہاں یہ نقطے مستوی س کے دائری نقطوں کے ظل نہیں ہیں۔

ہم بڑے حرفوں کے ظلوں کو چھوٹے حرفوں سے تعبیر کرتے آئے ہیں اور اس لئے سا اور سا کے ظلوں کو ہم نے یہاں سہ اور سہ سے تعبیر کیا ہے۔ اگر سا اور سا مستوی س میں دائری نقطے ہیں تو ان کے ظل سہ اور سہ مستوی س میں دائری نقطے نہیں ہونگے اور اگر مستوی س میں سہ اور سہ دائری نقطے ہیں تو مستوی س میں سا اور سا دائری نقطے نہیں ہونگے جس کا مطلب یہ ہے کہ وقت واحد میں صرف ایک زوج دائری نقطے ہو سکتا ہے۔

۲۵۷۔ اب ہم ظل کے ذریعہ تقسیم کی چند مثالیں دیں گے۔
اس مسئلہ پر غور کرو کہ دائرہ کے کسی نقطہ ا پر اس کا نصف قطر

(251)

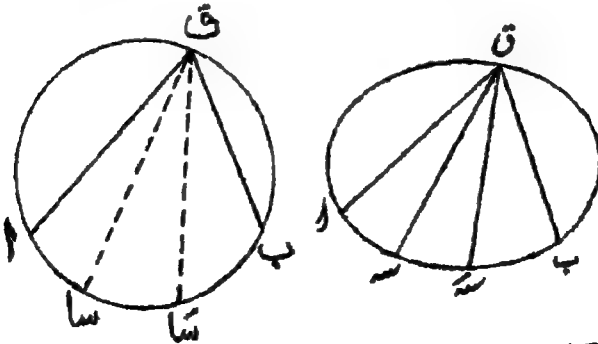
ا پر کے مماس پر عمود ہوتا ہے۔
دائرہ کو ایک مخروطی میں منقلل کرو جو سہ اور سہ میں سے گزرے
دائرہ ج کا مرکز سہ سہ کے قطب میں منقلل ہوتا ہے۔



عام مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مخروطی کے دو نقطوں سہ سہ پر کے
مماس نقطہ ج پر مماس اور مخروطی پر ا کوئی نقطہ ہو اور اس نقطہ پر کا مماس ا ت تو

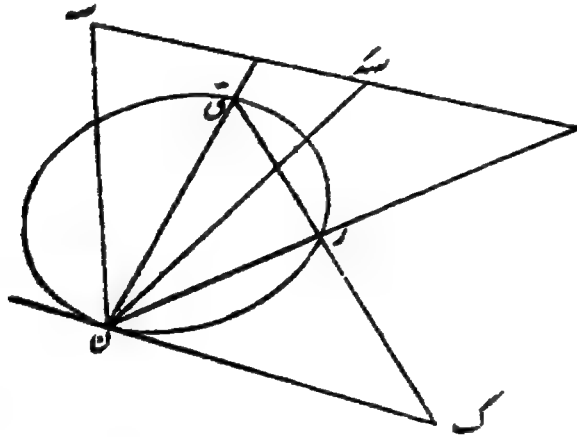
ا (ت ج سہ سہ) = ا - ا

۲۵۸۔ پھر اس مسئلہ پر غور کرو کہ وہ زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں ہوں مساوی
ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس قطعہ دائرہ میں جس کا قاعدہ ا ب ہے ایک زاویہ ا ب ق
ہے۔ دائرہ کو ایک مخروطی میں جو سہ اور سہ میں سے گزرے منقلل کرو تو ہمیں یہ مسئلہ ملے گا
کہ اگر چار نقطوں ا ب سہ سہ میں سے گزرنیوالے ایک ثابت مخروطی پر ق کوئی
نقطہ ہے تو (ا ب سہ سہ) منقلل ہے۔ (دفعہ ۲۴۵)



پس ایک ہی قطعہ دائرہ کے زاویوں کے مساوی ہونے کی خاصیت مخروطیوں کی مستقل چلیبی نسبت کی خاصیت میں تبدیل ہو کر عام صورت اختیار کرتی ہے۔

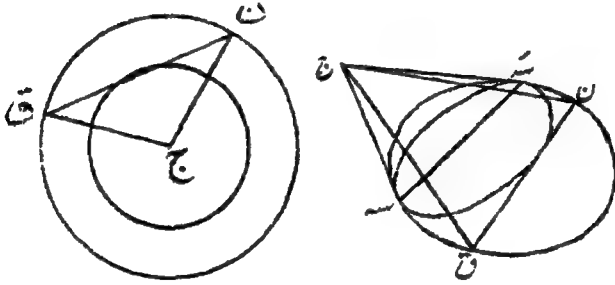
۲۵۹۔ پرتہ زائد کی اس خاصیت پر غور کرو کہ اگر اس میں مثلث $ن ق ر$ گھینچا جائے اور $ن$ پر اس مثلث کا زاویہ قائمہ ہو تو $ن$ پر $ق$ کا $ق$ پر $ر$ عمود ہوتا ہے۔



قائم زائد کو ایک مخروطی میں منظر کر جس میں سہ اور سہ مزدوج نقطے ہوں تو حسب ذیل خاصیت حاصل ہوگی :-

اگر کسی مخروطی پر $ن$ کوئی نقطہ ہو جبکہ مخروطی کے لحاظ سے سہ اور سہ مزدوج نقطے ہیں اور اگر $ق$ ، $ر$ مخروطی پر دو دوسرے ایسے نقطے ہوں کہ $ن (ق ر، سہ سہ) = ۱$ اور اگر $ن$ پر کا $سہ$

ق ر سے ک پر ملے تو ک (ن ق، سہ سہ) = ۱۔
۲۶۰۔ آخر میں ہم ظل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعمیر کریں گے کہ دائرہ کے وتر جو ایک ہم مرکز دائرہ کو مس کرتے ہیں مرکز پر ایک مستقل زاویہ بناتے ہیں۔



فرض کرو کہ بیرونی دائرہ کا ایک وتر ن ق ہے جو اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے اور مرکز ج پر ایک مستقل زاویہ بناتا ہے۔
یہ ہم مرکز دائرے دائری نقطوں سہ اور سہ پر دوہرہ تماس رکھتے ہیں اور ایسے وہ ان مخروطیوں میں جو سہ اور سہ پر دوہرہ تماس رکھتے ہیں منقول ہوتے ہیں۔
مرکز ج، سہ سہ کا قطب ہے اور اس لئے ج کا ظل ج سہ سہ کا قطب ہے۔

(253)

پس ظل کے ذریعہ حسب ذیل خاصیت حاصل ہوتی ہے:-
اگر دو مخروطی دو نقطوں سہ اور سہ پر دوہرہ تماس رکھیں اور اگر ان نقطوں پر کے تماس ج پر ملیں اور اگر بیرونی مخروطی کا کوئی وتر ن ق ہو جو اندرونی مخروطی کو مس کرے تو ج (ن ق سہ سہ)

مستقل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک مخروطی کامرکز و ادراستا ہی پر دائری نقطے بسا اور بسا ہوں اور اگر اس مخروطی کے لحاظ سے ایک خود فردن مثلث و بسا بسا ہو تو اس مخروطی کو قائم زائد ہونا چاہئے۔

۲۔ اگر ایک متغیر مخروطی دودے ہوئے نقطوں ن اور ن میں سے گذرے اور دودے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے تو ثابت کرو کہ ان دو خطوط مستقیم کے نقاط تماس کو ملائیو والا وتر ہمیشہ ن ن سے ایک ثابت نقطہ پر ملے گا۔

۳۔ اگر تین مخروطیوں میں دو نقطے مشترک ہوں تو دودو مخروطیوں کے متقابلہ مشترک وتر ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۴۔ دو مخروطی س، اور س، چار زاویوں ا، ب، ج، د کو محیط کرتے ہیں۔ ا اور ب میں سے خطوط ا، ع، ف، ب، گ، ہ کھینچے گئے ہیں جو س کو نقطوں ع اور گ پر اور س کو ف اور ہ پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ج، د، ع، گ، ف، ہ ہم نقطہ ہیں۔

۵۔ اگر ایک مخروطی دودے ہوئے نقطوں میں سے گذرے اور ایک دے ہوئے مخروطی کو ایک رے ہوئے نقطہ پر مس کرے تو دے ہوئے مخروطی کے ساتھ اس کے تقاطع کا وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا۔

۶۔ اگر بسا، بسا لاتنا ہی پر دائری نقطے ہوں تو قطع مکانی کے دو خیالی اس کے بسا اور بسا پر منطبق ہوتے ہیں اور مکانی کامرکز اور دوسرا حقیقی ماسک بسا بسا اور مکانی کے نقطہ تماس پر منطبق ہوتے ہیں۔

(254)

۷۔ اگر دودے ہوئے مخروطیوں کے چار نقاط تقاطع میں سے اور مشترک ماسوں کے ایک زوج کے نقطہ تقاطع میں سے گذرنا ہو ایک مخروطی کھینچا جائے تو یہ مخروطی مشترک ماسوں کے دوسرے زوج کے نقطہ تقاطع میں سے بھی گذرے گا۔

۸۔ اگر تین مخروطی دے ہوئے چار نقطوں میں سے گذریں تو ثابت کرو کہ

ان مخروطیوں میں سے کسی دو کا مشترک مماس تیسرے مخروطی سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۹۔ مثال ۸ کے مسئلہ کا متکافی مسئلہ معلوم کرو۔
۱۰۔ اگر دو نقطوں n اور n' سے ایک مخروطی کے مماس کھینچے جائیں تو ان مماسوں کے چار نقاط مماس اور نقاط n ، n' سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

[نقطوں n اور n' کو دائری نقطوں میں منتقل کرو]

۱۱۔ اگر نقطوں کے چار زوجوں میں سے تین زوجوں کے ہر اجتماع سے ایک مخروطی پر کے چہ نقطے حاصل ہوں تو (۱) اس طرح جو چار مخروطی حاصل ہوں ہیں وہ منطبق ہوتے ہیں یا (۲) نقطوں کے چار زوجوں سے جو چار خط حاصل ہوتے ہیں وہ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۱۲۔ تفظیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعمیم کرو کہ ایک مثلث کو محیط کر نیوالے قائم زاؤں کے مرکز کا طریق مثلث کا نو نقطی دائرہ ہوتا ہے۔

۱۳۔ تفظیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعمیم کرو کہ ایک قائم زاؤں کے مرکز کا طریق جبکہ لحاظ سے ایک دیا ہوا مثلث خود مزدوج ہو مثلث کا حاطہ دائرہ ہوتا ہے۔

۱۴۔ دو علی القوائم خطوط اور دائری نقطوں تک کھینچے ہوئے خطوط ایک موسیقی پینل بناتے ہیں۔ کسی دائرہ کے لحاظ سے دائری نقطوں کے متکافی معلوم کرو اس کا مرکز کسی نقطہ o اور دائری نقطوں کو ملانے والے خطوط، اس نقطہ کے لحاظ سے کسی دائرہ کے قطبی متکافی کے مماس ہوتے ہیں اور دائرہ کے مرکز کا متکافی متناظر وتر مماس ہوتا ہے۔

۱۵۔ حسب ذیل مسئلہ کو ثابت کرو اور تفظیل کے ذریعہ اسکی تعمیم کرو۔
ایک مثلث کے حاطہ دائرہ کا مرکز جبکہ مثلث ایک متکافی کے لحاظ سے خود مزدوج ہو متکافی کے مرتبہ واقع ہوتا ہے۔

۱۶۔ ایک مثلث ABC کے مستوی میں n اور n' دو نقطے ہیں۔ ABC میں نقطہ d ایسا لایا گیا ہے کہ ABC اور d n

اور د ن کے موسیقی مزدوج ہیں۔ اسی طرح ج ا اور ا ب میں علی الترتیب
۶ اور ف لے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د ب ۶ ج ف
ہم نقطہ ہیں۔

۱۷۔ تطیل کے ذریعہ حسب ذیل مسئلہ کی تعمیر کرو۔

وہ خطوط جو ایک مثلث کے ضلعوں کے انقاط وسطیٰ میں سے
گذرتے ہیں اور مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں مثلث کے حاط مرکز پر ہم
نقطہ ہوتے ہیں۔

۱۸۔ ایک مثلث کے حاط دائرہ کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں
عمود کھینچ جائیں تو ان عمودوں کے پائین ہم خط ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کی تعمیر کرو۔
۱۹۔ اگر دو مخروطی ا اور ب پر دو ہر ا کا س رکھیں اور اگر انہیں سے
ایک کا وتر ن ق دوسرے کو س پر مس کرے اور ا ب سے ت پر
لے تو

(ن ق، مسات) = ۱۔
۲۰۔ تطیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعمیر کرو کہ ہم ماسکی مخروطی ایک دوسرے کو
علی القوا لم قطع کرتے ہیں۔

۲۱۔ حسب ذیل مسئلہ کو ثابت کرو اور اسکی تعمیر کرو۔
ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے کسی دے ہوئے
نقطہ کے قطبی کا لفاف ایک قطع مکانی ہوتا ہے جو مخروطیوں کے محوروں کو
مس کرتا ہے اور دیا ہوا نقطہ اس کے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۲۔ اگر مخروطیوں کا ایک نظام چار نقطوں ا ب ج د میں سے
گذرے تو ان کے لحاظ سے خط ا ب کے قطب ایک خطل پر واقع
ہونگے۔ مزید بریں اگر یہ خطل ج د سے ن پر ملے تو ن ا اور ن ب
ج د اور ل کے موسیقی مزدوج ہونگے۔

۲۳۔ ایک ثابت نقطہ ت سے ایک مخروطی کے ماسوں کا زوج
مخروطی کے ایک تیسرے ثابت ماس سے نقطوں ل اور ل پر ملتا ہے۔

ان مخروطیوں میں سے کسی دو کا مشترک ماس تیسرے مخروطی سے موسیقی طور پر منقطع ہوتا ہے۔

۹۔ مثال ۸ کے مسئلہ کا مشکافی مسئلہ معلوم کرو۔
۱۰۔ اگر دو نقطوں ن اور ن سے ایک مخروطی کے ماس کھینچے جائیں تو ان ماسوں کے چار نقاط تماس اور نقاط ن، ن سب کے سب ایک مخروطی پر واقع ہوتے ہیں۔

[نقطوں ن اور ن کو دائری نقطوں میں منسلک کرو]

۱۱۔ اگر نقطوں کے چار زوجوں میں سے تین زوجوں کے ہر اجتماع سے ایک مخروطی پر کے چہرہ نقطے حاصل ہوں تو (۱) اس طرح جو چار مخروطی حاصل ہوئے ہیں وہ منطبق ہوتے ہیں یا (۲) نقطوں کے چار زوجوں سے جو چار خط حاصل ہوئے ہیں وہ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

۱۲۔ تظلیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعلیم کرو کہ ایک مثلث کو محیط کرنیوالے قائم زاؤں کے مرکز کا طریق مثلث کا نو نقطی دائرہ ہوتا ہے۔

۱۳۔ تظلیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعلیم کرو کہ ایک قائم زاؤں کے مرکز کا طریق جبکہ لحاظ سے ایک دیا ہوا مثلث خود مزدوج ہو مثلث کا حائط دائرہ ہوتا ہے۔

۱۴۔ دو علی التوا قائم خطوط اور دائری نقطوں تک کھینچے ہوئے خطوط ایک موسیقی پس منظر بناتے ہیں۔ کسی دائرہ کے لحاظ سے دائری نقطوں کے مشکافی معلوم کرو اس کا مرکز کہ کسی نقطہ و اور دائری نقطوں کو ملانے والے خطوط، اس نقطہ کے لحاظ سے کسی دائرہ کے قطبی مشکافی کے ماس ہوتے ہیں اور دائرہ کے مرکز کا مشکافی متناظر وتر تماس ہوتا ہے۔

۱۵۔ حسب ذیل مسئلہ کو ثابت کرو اور تظلیل کے ذریعہ اس کی تعلیم کرو۔
ایک مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز جبکہ مثلث ایک مکانی کے لحاظ سے خود مزدوج ہو مکانی کے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۱۶۔ ایک مثلث ا ب ج کے مستوی میں ن اور ن دو نقطے ہیں۔ ب ج میں نقطہ د ایسا لایا گیا ہے کہ ج ب اور د ا، د ن

اور د ن کے موسیقی مزدوج ہیں۔ اسی طرح ج ا اور ا ب میں علی الترتیب
ع اور ف لے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د ب ع ج ف
ہم نقطہ ہیں۔

۱۷۔ تطیل کے ذریعہ حسب ذیل مسئلہ کی تعمیر کرو۔

وہ خطوط جو ایک مثلث کے ضلعوں کے انقاط وسطیٰ میں سے
گذرتے ہیں اور مثلث کے ضلعوں پر عمود ہیں مثلث کے حائط مرکز پر ہم
نقطہ ہوتے ہیں۔

(255) ۱۸۔ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے کسی نقطہ سے مثلث کے ضلعوں
عمود کینچے جائیں تو ان عمودوں کے پائین ہم خط ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کی تعمیر کرو۔
۱۹۔ اگر دو مخروطی 'ا' اور 'ب' پر دو ہر ایک اس رکھیں اور اگر انہیں سے
ایک کا وتر ن ق دوسرے کو م پر مس کرے اور ا ب سے ت پر
لے تو

(ن ق، م ت) = ۱۔
۲۰۔ تطیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تعمیر کرو کہ ہم ماسکی مخروطی ایک دوسرے
علی القواطم قطع کرتے ہیں۔

۲۱۔ حسب ذیل مسئلہ کو ثابت کرو اور اسکی تعمیر کرو۔
ہم ماسکی مخروطیوں کے ایک نظام کے لحاظ سے کسی دے ہوئے
نقطہ کے قطبی کا لاف ایک قطع مکانی ہوتا ہے جو مخروطیوں کے محوروں کو
مس کرتا ہے اور دیا ہوا نقطہ اس کے مرتب پر واقع ہوتا ہے۔

۲۲۔ اگر مخروطیوں کا ایک نظام چار نقطہ 'ا' 'ب' 'ج' 'د' میں سے
گذرے تو ان کے لحاظ سے خط 'ا ب' کے قطب ایک خط ل پر واقع
ہوئے۔ مزید بریں اگر یہ خط 'ج د' سے ن پر لے تو ن ا اور ن ب
ج د اور ل کے موسیقی فردوج ہونگے۔

۲۳۔ ایک ثابت نقطہ ت سے ایک مخروطی کے ماسوں کا فردوج
مخروطی کے ایک تیسرے ثابت ماس سے نقطوں ل اور ل' پر ملتا ہے۔

مخروطی پر ن کوئی نقطہ ہے اور ن پر کے ماس پر ایک نقطہ لا ایسا لیا گیا ہے کہ لا (ن ت ل ل) = ۱۔ ثابت کرو کہ لا کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

۲۴۔ اگر مخروطی کے ماسک کی تعریف اس طرح کی جائے کہ وہ ایک نقطہ ہے جس پر مزدوج خطوں کا ہر زوج علی القوائم ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ ایک دائرہ کا قطبی مکانی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ایک مخروطی ہے جس کا ایک ماسک دوسرے دائرہ کا مرکز ہے۔

انیسواں باب

انقلاب

(256)

۲۶۱۔ ہم دفعہ ۱۳ میں سمجھا چکے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے "دو مقلوب" نقطوں کا کیا مطلب ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز O ہے تو N اور N' مقلوب نقطے ہونگے اگر وہ ایک ہی نصف قطر پر واقع ہوں اور $ON \times ON' = R^2$ = نصف قطر کا مربع۔ نقطے N اور N' مرکز کے ایک ہی جانب ہوتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ دائرہ کا نصف قطر (= OR) خیالی ہو جہاں کہ حقیقی ہے۔

جیسے N ایک منحنی میں کو مرسم کرتا ہے نقطہ N دوہرے منحنی میں کو مرسم کریگا۔ منحنیوں میں اور میں کو مقلوب منحنی کہتے ہیں۔ N کو انقلاب کا مرکز کہتے ہیں اور دائرہ کے نصف قطر کو

انقلاب کا نصف قطر۔

اگر N سے ایک منحنی فضا میں مرسم ہو جس کا مستوی منحنی ہونا ضروری نہیں ہے تو ہمیں نقطہ N کو O کے گرد ایک کرہ کے لحاظ سے N کا مقلوب سمجھنا چاہئے۔ یعنی خواہ N ایک مستوی میں ہو یا نہ ہو N کا مقلوب کہلائیگا اگر وہ فضا میں ایک ثابت نقطہ ہو اور

مخروطی پر ن کوئی نقطہ ہے اور ن پر کے ماس پر ایک نقطہ لا ایسا
 لیا گیا ہے کہ لا (ن ح ت ل ل) = ۱۔ ثابت کرو کہ لا کا طریق
 ایک خط مستقیم ہے۔

۲۴۔ اگر مخروطی کے ماسک کی تعریف اس طرح کی جائے کہ وہ ایک نقطہ
 ہے جس پر مزدوج خطوں کا ہر زوج علی القوائم ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ ایک
 دائرہ کا قطبی مکانی بلحاظ دوسرے دائرہ کے ایک مخروطی ہے جس کا ایک
 ماسک دوسرے دائرہ کا مرکز ہے۔

(256)

ایسواں باب

انقلاب

۲۶۱۔ ہم دفعہ ۱۳ میں سمجھا چکے ہیں کہ ایک دائرہ کے لحاظ سے "دو مقلوب" نقطوں کا کیا مطلب ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز O ہے تو N اور N' مقلوب نقطے ہونگے اگر وہ ایک ہی نصف قطر پر واقع ہوں اور $ON \times ON' = R^2$ = نصف قطر کا مربع۔ نقطے N اور N' مرکز کے ایک ہی جانب ہوتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ دائرہ کا نصف قطر (= OR) خیالی ہو جہاں K حقیقی ہے۔

جیسے N ایک منحنی میں کو مرسم کرتا ہے نقطہ N دوسرے منحنی میں کو مرسم کریگا۔ منحنیوں میں اور میں کو مقلوب منحنی کہتے ہیں۔ K کو انقلاب کا مرکز کہتے ہیں اور دائرہ کے نصف قطر کو

انقلاب کا نصف قطر۔

اگر N سے ایک منحنی فضا میں مرسم ہو جس کا مستوی منحنی ہونا ضروری نہیں ہے تو ہمیں نقطہ N کو N' کے گرد ایک کرہ کے لحاظ سے N کا مقلوب سمجھنا چاہئے۔ یعنی خواہ N ایک مستوی میں ہو یا نہ ہو N' کا مقلوب کہلائیگا اگر فضا میں ایک ثابت نقطہ ہو اور

ون پر ن ایسا لیا گیا ہو کہ ون \times ون = مستقل کی۔ وہ منحنی
یا سطح جسے ن مرسم کرتا ہے اس منحنی یا سطح کا مقلوب کہلاتی ہے جسے
ن مرسم کرتا ہے اور اس کے بالعکس۔

بعض اوقات یہ کہہ سہولت ہوتی ہے کہ ن، ایک نقطہ کے

لحاظ سے ن کا مقلوب ہے۔ اسکا یہ مطلب ہے کہ واس دائرہ
یا کرہ کا مرکز ہے جس کے لحاظ سے نقطے مقلوب ہیں۔

۲۶۲۔ مسئلہ۔ کسی دائرہ کا مقلوب ایک نقطہ کے

لحاظ سے جو اسی مستوی میں ہو ایک دائرہ یا خط مستقیم ہوتا ہے
فرض کرو کہ انقلاب کا مرکز و، دائرہ پر واقع ہے۔

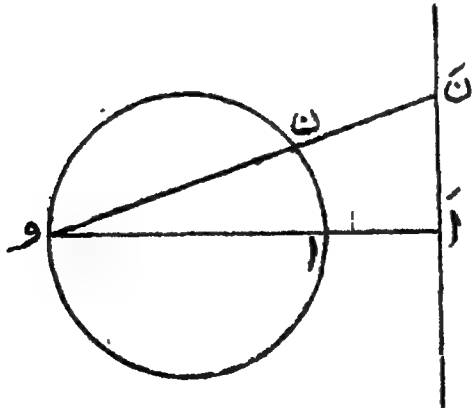
فرض کرو کہ انقلاب کا نصف قطر ک ہے۔

قطر و (کھینچو اور فرض کرو کہ ا کا مقلوب ا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور اسکا مقلوب ن ہے۔

اب ون \times ون = ک = و ا \times و ا

ن ا ن دائری ہے۔



۱۔ زاویہ $\angle \text{ان}$ زاویہ $\angle \text{ان}$ کا مکمل ہے جو ایک قائمہ زاویہ ہے۔
 ۲۔ $\angle \text{ان}$ پر عمود ہے۔
 ۳۔ ان کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو و پر عمود ہے اور ا کے
 مقلوب میں سے گذرتا ہے۔

پھر فرض کرو کہ و دائرہ کے محیط نہیں ہے۔
 فرض کرو کہ دائرہ پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کا مقلوب ن ہے۔
 فرض کرو کہ ون دائرہ کو کمری پر قطع کرتا ہے۔
 فرض کرو کہ ا دائرہ کا مرکز ہے۔

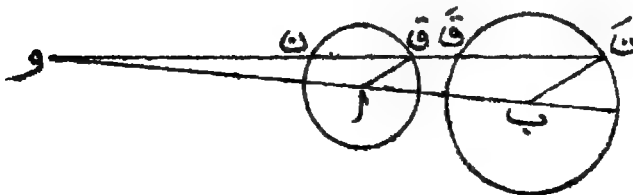
اب $\text{ون} \times \text{ون} = \text{ک}^۲$
 اور $\text{ون} \times \text{وق} = \text{و}$ سے دائرہ کے حماس کا مربع = $\text{ت}^۲$
 (فرض کرو)

$$\frac{\text{ون}}{\text{وق}} = \frac{\text{ک}^۲}{\text{ت}^۲}$$

۱۔ ا پر نقطہ ب لیا گیا کہ $\frac{\text{وب}}{\text{وا}} = \frac{\text{ک}^۲}{\text{ت}^۲}$ ، اس لئے ب
 ایک ثابت نقطہ ہے اور ب ن ، ا ق کے متوازی ہے۔

(258)

اور $\frac{\text{بن}}{\text{اق}} = \frac{\text{وب}}{\text{وا}} = \frac{\text{ک}^۲}{\text{ت}^۲}$ ، ایک مستقل
 ۲۔ ن ، ا ب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔
 اس لئے دائرہ کا مقلوب دوسرا دائرہ ہوتا ہے۔



نتیجہ صریح ۱۔ کسی خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہوتا ہے جو انقلاب کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر دو دائرے ایک دوسرے کے لحاظ سے مقلوب ہوں تو انقلاب کا مرکز مشابہت کا مرکز ہوتا ہے (دفعہ ۲۵) اور دائروں کے نصف قطروں میں وہ نسبت ہوتی ہے جو وہی کے مرکزوں کے فاصلوں میں ہے۔

طالب علم کو یہ دیکھنا چاہئے کہ اگر ہم ان دو دائروں کو S اور S' سے موسوم کریں اور اگر Q ، S سے Q' پر ہے تو Q' ، S' کا مقلوب ہوگا۔

نوٹ۔ دائرہ S کا وہ حصہ جو Q کی جانب محذب ہے دائرہ S' کے اُس حصہ کے جواب میں ہوتا ہے جو Q' کی جانب منقعر ہے اور اس کے بالعکس۔

S اور S' کے مشترک مماسوں میں سے دو مماس M و M' سے گذرتے ہیں اور ان مماسوں میں سے ہر ایک کے نقاط مماس مقلوب نقطے ہونگے۔

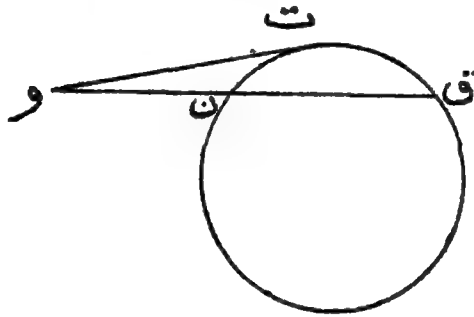
۲۶۳۔ مسئلہ۔ کسی کرہ کا مقلوب کسی نقطہ کے لحاظ سے ایک کرہ یا ایک مستوی ہوتا ہے۔

یہ مسئلہ مسئلہ سابق سے ۱ کو محور مانکر اس کے گرد شکلوں کو گھمانے سے فوراً حاصل ہوتا ہے۔ پہلی شکل میں دائرہ اور خط ایک کرہ اور ایک مستوی کی تکوین کرینگے جنہیں سے ہر ایک دوسرے کا مقلوب ہوگا۔ دوسری شکل میں دو دائرے دو کڑوں کی تکوین کرینگے جنہیں سے ہر ایک دوسرے کا مقلوب ہوگا۔

۲۶۴۔ مسئلہ۔ کسی دائرہ کا مقلوب ایک نقطہ کے لحاظ سے جو دائرہ کے مستوی میں نہ ہو ایک دائرہ ہوتا ہے۔

کیونکہ دائرہ کو دو کڑوں کا تقاطع سمجھا جاسکتا ہے اور ان کڑوں میں سے کسی کا و میں سے گزرنا ضروری نہیں ہے۔
یہ کڑے کڑوں میں مقلوب ہونگے اور ان کا تقاطع جو دوسرے دو کڑوں کے تقاطع کا مقلوب ہے (یعنی ابتدائی دائرہ کا مقلوب ہے) ایک دائرہ ہوگا۔

۲۶۵۔ مسئلہ۔ کوئی دائرہ ایک نقطہ کے لحاظ سے جو اسی مستوی میں ہو خود میں مقلوب ہوگا اگر انقلاب کا نصف قطر اس کا طول ہو جو انقلاب کے مرکز سے دائرہ تک کھینچا گیا ہے۔



یہ صریحاً ٹھیک ہے کیونکہ اگر و سے دائرہ کا ماس و ت ہو اور و ن ق دائرہ کو ن اور ق پر قطع کرے تو چونکہ و ن و ق = و ت اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن اور ق مقلوب نقطے ہیں۔
یعنی دائرہ کا وہ حصہ جو و کی جانب مقلوب ہے اس حصہ میں مقلوب ہوتا ہے جو و کی جانب محدب ہے اور اس کے بالعکس۔
نتیجہ صریح ۱۔ ہم محور دائروں کا کوئی نظام ایک ساتھ خود اسی نظام کے دائروں میں مقلوب کیا جاسکتا ہے اگر انقلاب کا مرکز نظام کے محور پر ہو۔

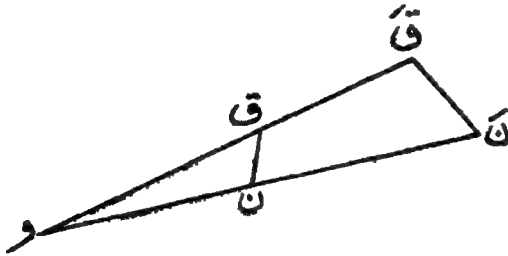
نتیجہ صریح ۲۔ کوئی تین ہم مستوی دائرے ایک ساتھ انہی دائروں میں
مقلوب کئے جاسکتے ہیں۔

کیونکہ ہمیں صرف ان تین دائروں کے بنیادی مرکز کو انقلاب کا مرکز
لینا ہوگا اور اس سے انہیں سے کسی دائرہ کے مماس کو انقلاب کا نصف قطر۔

۲۶۶۔ مسئلہ۔ دو ہم مستوی منحنی اُسی زاویہ پر متقاطع ہوتے
ہیں جس پر ان کے مستوی میں کے کسی نقطہ کے لحاظ سے
ان کے مقلوب متقاطع ہوتے ہیں۔

(260)

فرض کرو کہ ایک منحنی $س$ پر $ن$ اور $ق$ ایک دوسرے سے
قریب نقطے ہیں۔ فرض کرو کہ $ن$ اور $ق$ کے مقلوب ایک نقطہ $و$ کے
لحاظ سے $ن$ اور $ق$ ہیں۔



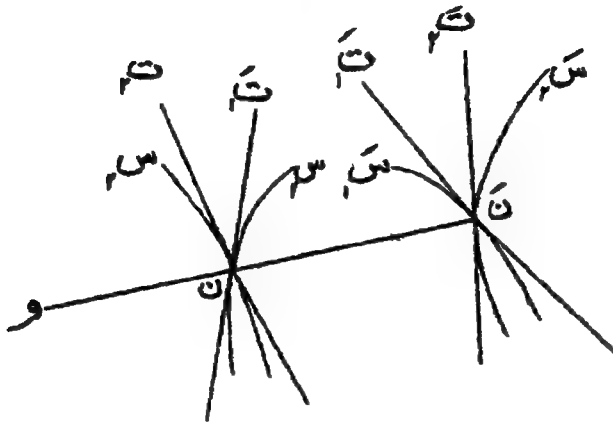
اب چونکہ $ون \times ون = ک = وق \times وق$

$ق ن ن ق$ دائری ہے۔

$ن و ن ق = وق \times وق$

اب فرض کرو کہ $ق$ 'ن' تک حرکت کرتا ہے تو $ن ق$ 'ن' پر
س کا مماس ہو جاتا ہے اور اسی اثنا میں $ق$ 'ن' تک حرکت کر رہا ہے
اور $ن ق$ 'ن' پر مقلوب منحنی $س$ کا مماس ہو جاتا ہے۔

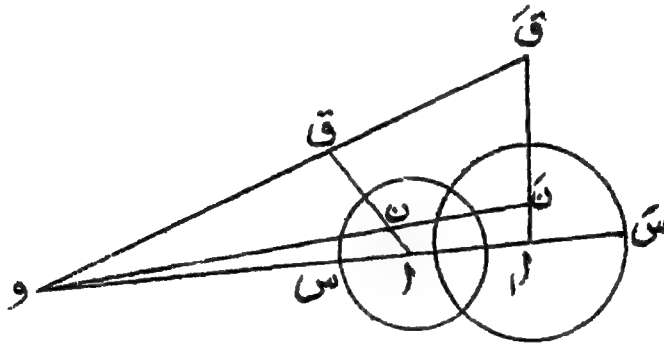
ن اور ن پر کے ماس، و ن کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔
مگر یہ ماس ضد متوازی ہیں متوازی نہیں ہیں۔



اب اگر دو منحنی م س اور م س ہوں جو ن پر متقاطع ہوتے ہیں اور نقطہ ن پر ان کے ماس ن ت اور ن ت ہوں اور اگر مقلوب منحنی م س اور م س ہوں جو ن پر متقاطع ہوتے ہیں جو ن کا مقلوب ہے اور ان کے ماس نقطہ ن پر ن ت اور ن ت ہوں تو اوپر کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\angle ت ن ت = \angle ت ن ت$ پس م س اور م س اسی زاویہ پر متقاطع ہوتے ہیں جس پر ان کے مقلوب نتیجہ صریح۔ اگر دو منحنی ایک نقطہ ن پر پس کریں تو ان کے مقلوب ن کے مقلوب پر پس کرتے ہیں۔

۲۶۷۔ مسئلہ۔ اگر کسی دائرہ م کو دائرہ م میں

مقلوب کیا جائے اور نقطے ن اور ق 'دائرہ س کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہوں تو ن اور ق کے مقلوب نقطے ن اور ق 'دائرہ س کے لحاظ سے مقلوب نقطے ہونگے۔
 زمین کو کہ انقلاب کا مرکز و ہے۔



چونکہ س کے لحاظ سے ن اور ق مقلوب نقطے ہیں اس لئے
 'س' ن اور ق میں سے گزرنیوالے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے
 اور بالخصوص اس دائرہ کو جو 'ن' ق میں سے گزرتا ہے۔
 اس لئے دائرہ ون ق کا مقلوب 'س' کو علی القوائم قطع کریگا
 لیکن ون ق کا مقلوب ایک خط مستقیم ہے کیونکہ انقلاب کا
 مرکز و محیط پر واقع ہے۔

اس لئے ن ق 'دائرہ ون ق کا مقلوب ہے
 اس لئے ن ق 'دائرہ س کو علی القوائم قطع کرتا ہے یعنی
 س کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔
 پھر چونکہ ن اور ق میں سے گزرنیوالا ہر دائرہ س کو علی القوائم
 قطع کرتا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن اور ق میں سے گزرنیوالا ہر دائرہ

(262)

سے کو علی القوائم قطع کرتا ہے (دفعہ ۲۲۶)۔

اس لئے اگر میں کا مرکز O ہو تو

$$ON \times OQ = OS \text{ کے نصف قطر کا مربع}$$

اس لئے N اور Q 'دائرہ میں کے لحاظ سے متغلب نقطے ہیں'

۲۶۸۔ مسئلہ۔ غیر قاطع ہم محور دائروں کا کوئی نظام ہم مرکز دائروں میں متغلب کیا جاسکتا ہے۔

نظام چونکہ غیر قاطع ہے اس لئے انتہائی نقطے L اور L' حقیقی ہیں

اس نظام کو L کے لحاظ سے متغلب کرو۔

اب چونکہ L اور L' 'نظام کے ہر دائرہ کے لحاظ سے متغلب نقطے ہیں اس لئے ان کے متغلب 'انقلاب میں ہر دائرہ کے لئے متغلب نقطے ہونگے۔

لیکن L چونکہ انقلاب کے دائرہ کا مرکز ہے اس لئے اس کا متغلب لانا ہی پر ہے۔ اس لئے L' 'ہر دائرہ کے مرکز میں متغلب ہونا چاہئے۔

۲۶۹۔ فویرباخ (Feuerbach) کا مسئلہ۔

انقلاب کے اصولوں کی وضاحت ان کو فویرباخ کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کر کے کی جاسکتی ہے۔ یہ مسئلہ حسب ذیل ہے:

کسی مثلث کا نو نقطی دائرہ مثلث کے اندرونی اور

تین جانبی دائروں کو مس کرتا ہے۔

فرض کر دو کہ (ABC) ایک مثلث ہے، E اس کا اندرونی مرکز

اور E اس کا وہ جانبی مرکز ہے جو A کے مقابل ہے۔

فرض کرو کہ اندرونی دائرہ اور اس جانبی دائرہ کے نقاط تماس ضلع
 ب ج کے ساتھ ہر اور ہر ہیں۔
 فرض کرو کہ خط ا ع ع جو زاویہ ا کی تفسیف کرتا ہے ب ج
 کو سا پر قطع کرتا ہے۔
 ا ل ب ج پر عمود کھینچو۔ فرض کرو کہ حائل مرکز عمودی مرکز
 اور نو نقطہ مرکز علی الترتیب و ف، ع ہیں۔
 و د ب ج پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ حائل دائرہ سے
 گ پر ملتا ہے۔
 اب چونکہ ب ع اور ب ع ا زاویہ ب کے اندرونی
 اور بیرونی ناصف ہیں اس لئے
 (ا ل ا سا ع ع ا) = ۱ -
 ل (ا ل ا سا ع ع ا) = ۱ -
 یہ چونکہ ل ا ایک قائمہ زاویہ ہے ل ع اور ل ع ا
 ب ج کے ساتھ مساوی میلان رکھتے ہیں (دفعہ ۲ نتیجہ صریح ۲)
 یہ اندرونی دائرہ اور جانبی دائرہ کے لحاظ سے ل کے قطبی
 ب ج کے ساتھ مساوی میلان رکھیں گے۔
 اب اندرونی دائرہ کے لحاظ سے ل کا قطبی ہر میں سے گذرتا
 ہے اور جانبی دائرہ کے لحاظ سے اس کا قطبی ہر میں سے گذرتا ہے۔
 فرض کرو کہ اندرونی دائرہ کے لحاظ سے ل کا قطبی ہر لا ہے
 جو و د کو لا پر قطع کرتا ہے۔

ن د بنیادی محور ہے اور وہ ع ع پر عمود ہے۔
اب ک کا خط پائین د میں سے گذرتا ہے اور چونکہ ک زاویہ
کے ناصف پر ہے اسلئے یہ خط پائین صریحاً اگ پر عمود ہونا چاہئے۔
ن د ک کا خط پائین ہے۔

لیکن ک کا خط پائین ک ف کی تنصیف کرتا ہے۔
ش ک ن ف ایک خط مستقیم ہے اور ن اس کا وسطی نقطہ ہے
اور چونکہ و ف کا وسطی نقطہ ع ہے اسلئے ع ن = ف و ک
ن نو نقطی دائرہ پر ہے۔

اب نو نقطی دائرہ اندرونی دائرہ اور جانی دائرہ کو اس دائرہ کے
محاط سے جس کا مرکز ن اور نصف قطر ن د یا ن ل ہے مقلوب کرو۔
اندرونی دائرہ اور جانی دائرہ خود میں مقلوب ہونگے اور نو نقطی دائرہ
خط ج ج میں مقلوب ہوگا کیونکہ ن نو نقطی دائرہ پر ہونے کی وجہ سے
اس دائرہ کا مقلوب ایک خط مستقیم ہونا چاہئے اور اس دائرہ کے نقطے د
اور ل خود میں مقلوب ہوتے ہیں ل د نو نقطی دائرہ کا مقلوب ہے۔
لیکن یہ خط اندرونی اور جانی دونوں دائروں کو مس کرتا ہے۔
ن نو نقطی دائرہ اندرونی اور جانی دونوں دائروں کو مس کرتا ہے۔
اسی طرح وہ دوسرے دو جانی دائروں کو مس کرتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ نو نقطی دائرہ اور اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس م کا
مقلوب ہوگا اور نو نقطی دائرہ اور جانی دائرہ کا نقطہ تماس م کا مقلوب ہوگا

مثالیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ قاطع ہم محور دائروں کا کوئی نظام ہم نقطہ خطوط مستقیم میں
مقلوب کیا جاسکتا ہے۔
- ۲۔ ایک کرہ کو اس کی سطح پر کے ایک نقطہ سے مقلوب کیا گیا ہے۔ ثابت
کرہ کی سطح پر کے نصف النهاروں اور توازیوں کے کسی نظام کے جواب میں مقلوب

(265)

شکل میں ہم محور دائروں کے دو نظامات ہونگے۔ (دیکھو دوسرا باب مثال ۱۶)
 ۳۔ اگر چار ہم خط نقطے (ا، ب، ج، د) ہوں اور ان کے مقلوب
 نقطے (آ، ب، ج، د) ہوں تو

$$\frac{ا ج \times ب د}{ا ب \times ج د} = \frac{ا ج \times ب د}{ا ب \times ج د}$$

۴۔ اگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مستوی میں ن کوئی نقطہ ہو
 اور اس نظام کے مختلف دائروں کے لحاظ سے ن کے مقلوب نقطے ن، ن، ن، ن
 وغیرہ ہوں تو ن، ن، ن، ن، وغیرہ ہم دائری ہونگے۔

۵۔ اگر ہم محور دائروں کے ایک نظام کے مستوی میں ن ایک نقطہ
 ہو اور اس نظام کے ایک دائرہ کے لحاظ سے ن کا مقلوب ن ہو اور دوسرے
 دائرہ کے لحاظ سے ن کا مقلوب ن ہو اور تیسرے دائرہ کے لحاظ سے
 ن کا مقلوب ن ہو اور علیٰ ہذا انقیاس تو ن، ن، ن، ن، وغیرہ ہم دائری ہوں گے۔
 ۶۔ ایک دائرہ کے دو وتر ن و ن اور ق و ق ہیں اور ایک
 ثابت نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ دائروں ن و ق اور ن و ق کے دوسرے
 تقاطع کا طریق ایک دوسرا ثابت دائرہ ہے۔

۷۔ ثابت کرو کہ کسی ہم محور نظام کے دائروں کی طاق تعداد کو مقلوب
 کر نیکانیتجہ نظام کے ایک دائرہ کے واحد انقلاب کے مثل ہے۔ نیز اس طرح
 وہ دائرہ معلوم کرو جو ایک دی ہوئی ترتیب میں نین دئے دائروں کے مثل ہے۔

۸۔ اگر وہ دائرے جو ایک دئے ہوئے نقطہ ن کے لحاظ سے دائروں

(ا ج د اور ب ج د کے مقلوب ہیں مساوی ہوں تو دائرہ ن ج د،
 دئے ہوئے دو دائروں کے زوایا ئے تقاطع کی (داخلاً اور خارجاً) تئیف کرینگا

۹۔ تین دائرے نقطوں کے تین ازواج (ا، ا، ب، ب، ج، ج پر ایک
 دوسرے کو علی القیاس قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ (ب ج، ا ب ج) میں سے گزرنے والا
 دائرے (پرس کرتے ہیں۔

۱۰۔ اگر نو نقطہ دائرہ اور مثلث کا ایک زاویہ دئے جائیں تو ثابت کرو کہ

عمودی مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے۔
۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کا نو نقطی دائرہ ان تین مثلثوں کے اندرونی
اور جانی دائروں کو مس کرتا ہے جو مثلث کے راسوں کو عمودی مرکز کے ساتھ
ملانے سے بنتے ہیں۔

۱۲۔ دو دائروں ج اور ج کے لحاظ سے ایک دی ہوئی شکل کی
مقلوب شکلیں علی الترتیب $س$ اور $س$ سے تعبیر کئی ہیں۔ ثابت
کرو کہ اگر ج اور ج علی القوائم تقاطع ہوں تو $س$ کا مقلوب بمحاط ج
وہی ہوگا جو $س$ کا مقلوب بمحاط ج کے ہے۔

۱۳۔ اگر 'ا' ب' ج تین ہم خط نقطے ہوں اور کوئی دوسرا نقطہ ہو
تو ثابت کرو کہ و ب ج' و ج' ا' اور و ا ب کے محاط دائروں کے
مرکز 'ق' 'ق' 'ق' کے ساتھ ہم دائری ہوں گے۔
نیز اگر تین دوسرے دائرے 'ا' و اور 'ا' و اور ب' و اور ج
میں سے گزرتے ہوئے کھینچے جائیں جو بالترتیب و ب ج' و ج' ا' و ا ب
کو علی القوائم قطع کریں تو یہ دائرے ایک ایسے نقطہ پر ملینگے جو چار ضلعی
ون ق' 'ق' 'ق' کے محاط دائرہ پر واقع ہوگا۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر دائرہ ن ا ب' دائرہ ن ج د کو اور دائرہ
ن ا ج' دائرہ ن ب د کو علی القوائم قطع کرے تو دائرہ ن ا د' دائرہ
ن ب ج کو علی القوائم قطع کریگا۔

۱۵۔ ایک مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کے ساتھ نو نقطی دائرہ
کا نقطہ تماس حاصل کرنے کے لئے حسب ذیل عمل ثابت کرو:

زاویہ ا کا نصف ب ج سے ہ پر ملتا ہے۔ ہ سے اندرونی
دائرہ کا دوسرا تماس ہ ما کھینچا گیا ہے۔ اس تماس کے نقطہ تماس ما کو
ب ج کے وسطی نقطہ د کے ساتھ ملایا گیا ہے تو ملائی والا یہ خط اندرونی دائرہ
مکرر مطلوبہ نقطہ پر قطع کریگا۔

- ۱۶۔ ایک مثلث کا محیط دائرہ اور اندرونی دائرہ دئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مرکز ہندسی کا طریق ایک دائرہ ہے۔
- ۱۷۔ 'ا' 'ب' 'ج' تین دائرے ہیں اور ان کے مقلوب کسی دوسرے دائرہ کے لحاظ سے 'ا' 'ب' 'ج' ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر 'ا' اور 'ب' 'ج' کے لحاظ سے مقلوب ہوں تو 'ا' اور 'ب' 'ج' کے لحاظ سے مقلوب ہونگے۔
- ۱۸۔ ایک دائرہ میں کو ایک خط میں مقلوب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط 'س' اور انقلاب کے دائرہ کا بنیادی محور ہے۔
- ۱۹۔ ثابت کرو کہ ایک دائرہ اور اس کے مقلوب کا درمیانی زاویہ انقلاب کے دائرہ سے تنصیف ہوتا ہے۔
- ۲۰۔ ایک مثلث 'ا' 'ب' 'ج' کے ضلعوں پر عمود 'ا' 'ب' 'ج' ن کھینچے گئے ہیں جو مرکز عمودی 'ک' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ 'ک' 'ن' 'ا' 'ب' 'ج' اور 'ک' 'ل' 'ج' 'ا' کے گرد کھینچے ہوئے تین دائروں کو مس کرنے والے چار دائروں میں سے ہر ایک مثلث 'ا' 'ب' 'ج' کے محیط دائرہ کو مس کرتا ہے۔
- [مرکز 'ک' کے ذریعہ ان تین دائروں کو مثلث کے اضلاع میں اور محیط دائرہ کو نو نقطہ میں مقلوب کرو]
- ۲۱۔ دو کرویوں کو جنہیں سے ایک بالکلیہ دوسرے کے اندر واقع ہے ہم مرکز کرویوں میں مقلوب کرو۔
- ۲۲۔ دفعہ ۲۶ کے مسئلہ کی خاص صورت کا امتحان کرو جہاں انقلاب کا مرکز 'س' پر واقع ہے۔
- ۲۳۔ اگر 'ا' 'ن' 'ق' تین ہم خط نقطہ ہوں اور اگر 'و' کے لحاظ سے 'ن' 'ق' کے مقلوب 'ن' 'ق' ہوں اور اگر 'ن' 'ق' 'و' سے 'ا' پر ملے تو

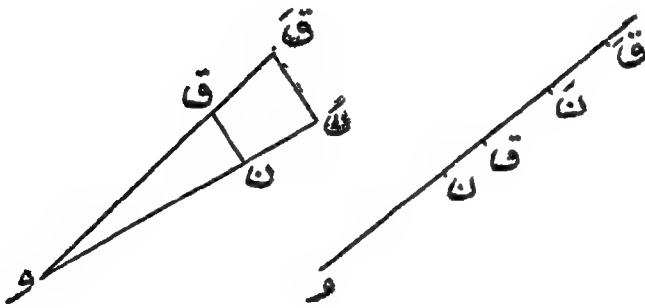
$$\frac{ان \times اق}{وا} = \frac{ان \times اق}{وا}$$

نظیری نقطوں کو ملاتا ہے اور ان خطوں میں ایک مستقل نسبت ہوتی ہے

کیونکہ اگر ش میں ن اور ق دو نقطے ہوں اور ش میں نظیری نقطے ن اور ق تو چونکہ ون : ون = وق : وق اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ ن ق اور ن ق متوازی ہیں اور ن ق : ن ق = ون : ون = مستقل۔

اس صورت میں بھی جبکہ ق خط ون میں ہو یہ درست ہے کہ ن ق : ن ق = مستقل نسبت کیونکہ ون : وق = ون : وق
 ون : وق = ون : ون = ون : وق
 ون : ن ق = ون : ون = ون : ن ق
 ن ق : ن ق = ون : ون = ون : ن ق

(268)



نتیجہ صریح۔ اگر سطحیں ش اور ش، منحنی میں اور میں ہوں تو نظیری نقطوں ن اور ن پر ایسے ماس متوازی ہونگے۔ کیونکہ ن پر کا ماس اس خط کا انتہائی محل ہوتا ہے جو ن اور ایک قریبی نقطے ق میں سے گذرتا ہے اور اسی طرح ن پر کا ماس اس خط کا انتہائی محل ہے جو نظیری نقطوں ن اور ق میں سے گذرتا ہے۔

۲۷۲۔ مسئلہ۔ دو ہم وضع شکلوں کا ہم وضع مرکز نظیری

نقطوں کے دوزو جوں سے متعین ہوتا ہے۔

کیونکہ اگر نظیری نقطوں کے دوزو ج 'ن' اور 'ق' 'ق' دے گئے ہوں تو 'و' 'ن' اور 'ق' 'ق' کا نقطہ تقاطع ہوگا۔

یا اس صورت میں جبکہ 'ق' 'خط' 'ن' میں ہو تو اس خط میں

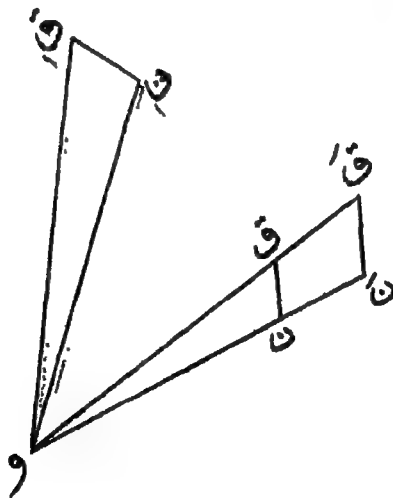
و کی تعین مساوات 'ون' = 'نق' سے ہوگی۔

اس طرح سے ایک اور صرف ایک نقطہ معلوم ہوتا ہے کیونکہ

ون اور ون کی ایک ہی علامت ہونی چاہئے یعنی وہ ایک ہی سمت میں ہونے چاہئیں۔

۲۷۳۔ راست مشابہ شکلیں۔

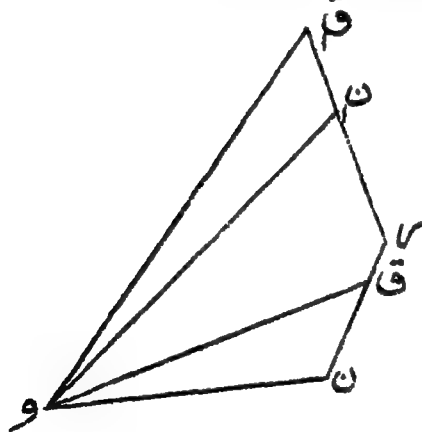
اب اگر دو شکلیں 'ش' اور 'ش' ہم وضع ہوں اور ہم وضع مرکز و ہو اور اگر شکل 'ش' کو اس کے مستوی میں و کے گرد کسی زاویہ میں گھمایا جائے تو ایک نئی شکل 'ش' حاصل ہوگی جو 'ش' کے مشابہ ہوگی لیکن مشابہ واقع نہیں ہوگی۔



دو ایسی شکلیں Δ اور Δ ، راست مشابہ کہلاتی ہیں اور
و کو ان شکلوں کا مشابہت کا مرکز کہتے ہیں۔

دو راست مشابہ شکلیں یہ خاصیت رکھتی ہیں کہ ان خطوں کا درمیانی
زاویہ \angle و \angle جو و کو دو نظیری نقطوں \angle اور \angle سے ملاتے ہیں
مستقل ہوتا ہے۔ نیز \angle و \angle مستقل ہوتا ہے اور \angle و \angle : \angle و \angle :
= وہی مستقل نیز مثلثات \angle و \angle اور \angle و \angle مشابہ ہوتے ہیں۔

۲۷۴۔ مسئلہ۔ اگر دو راست مشابہ شکلوں کے نظیری
نقطوں کے دوزوج \angle و \angle اور \angle و \angle ہوں اور اگر \angle و \angle
اور \angle و \angle ، \angle پر تقاطع ہوں تو دائروں \angle و \angle \angle و \angle ہوں
کا دوسرا نقطہ تقاطع و ہوگا۔



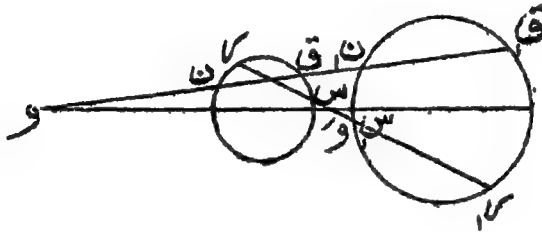
چونکہ \angle و \angle = \angle و \angle :
∴ \angle و \angle اور \angle و \angle \angle ہوں
∴ \angle و \angle \angle دائری ہے۔

جب دو شکلیں ضد ہم وضعی ہوں تو ایک شکل کے دو نقطوں $ن$ اور $ق$ کو ملائیو الاخط اش خط کے متوازی ہوتا ہے جو دوسری شکل کے تطیری نقطوں $ن$ اور $ق$ کو ملاتا ہے لیکن $ن ق$ اور $ن ق$ مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں۔

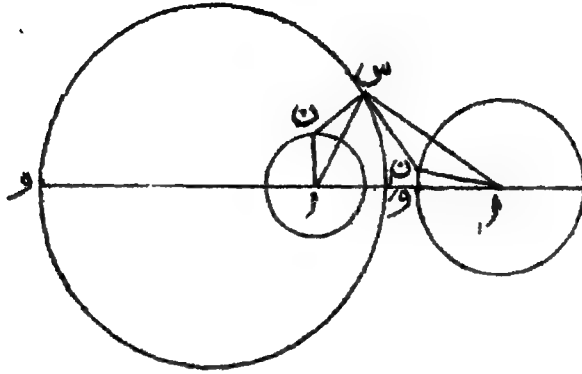
۲۷۶۔ دو ہم مستوی دائروں کی صورت۔

(271)

اگر ہم دو دائرے ہوئے دائروں کے مرکوزوں کو ملانے والے خط کی تقسیم نصف قطروں کی نسبت میں خارجاً نقطہ $و$ پر اور داخلاً نقطہ $و$ پر کریں تو دفعہ ۲۵ سے یہ ظاہر ہے کہ ان دو دائروں کے لئے وہم وضعی مرکز اور وہم وضعی مرکز ہوگا۔



ہم نے قبل ازیں ان نقطوں کو ”مشابہت کے مرکز“ کہا ہے لیکن اب ہم دیکھتے ہیں کہ وہ صرف مشابہت کے مخصوص مرکز ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ مشابہت کے دوسرے مرکز بھی ہیں جو ان نقطوں کے خط میں واقع نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز $ا$ ہے اور اس کے جواب میں دوسرے دائرہ کا مرکز $ا$ ہے تو ہم ایک دائرہ کے کسی نقطہ $ن$ کو دوسرے دائرہ کے کسی نقطہ $ن$ کی نظیر میں لے سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ اس تناظر کے لئے مشابہت کا مرکز 'س' ہے۔
 مثلثات 'ن' 'س' 'و'، 'ن' 'س' 'و'، 'ن' 'س' 'و' مشابہت میں ہیں اور
 'س' : 'و' : 'ن' = 'و' : 'ن' : 'و' = نصف قطروں کی نسبت
 اس لئے 'س' اس دائرہ پر واقع ہے جو 'و' پر ایسے قطر مانکر

(272)

کھینچا گیا ہے (دفعہ ۲۷)
 اس لئے دو ہم مستوی دائروں کے لئے مشابہت کے مرکوزوں کا
 طریق وہ دائرہ ہے جو ہم وضعی اور ضدہم وضعی مرکوزوں کو ملائیو اسے خط پر
 بنایا گیا ہو۔

اس دائرہ کو ہم مشابہت کا دائرہ کہہ چکے ہیں اور طالب علم اب
 سمجھ گیا ہو گا کہ اس کا یہ نام رکھنے کا سبب کیا ہے۔

۲۷۷۔ بالعکس مشابہ اشکال۔

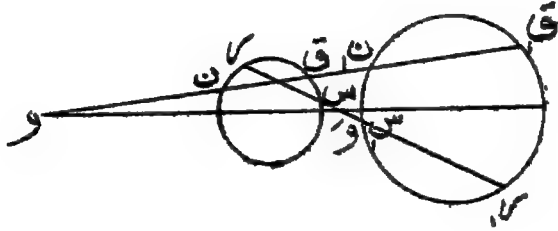
اگر ایک مستوی میں 'ش' ایک شکل ہو اور اس مستوی میں 'و' ایک
 ثابت نقطہ ہو اور اگر دوسری شکل 'س' اس طور پر حاصل کی جائے کہ شکل
 'ش' کے نقطوں 'ن' کے جواب میں اسی مستوی میں نقطے 'و' ایسے

جب دو شکلیں ضد ہم وضعی ہوں تو ایک شکل کے دو نقطوں ن اور ق کو ملانیو لائحہ اس خط کے امتوازی ہوتا ہے جو دوسری شکل کے نظیری نقطوں ن اور ق کو ملاتا ہے لیکن ن ق اور ن ق مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں۔

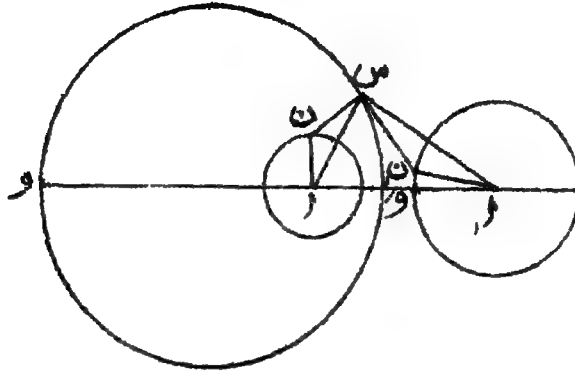
۲۷۶۔ دو ہم مستوی دائروں کی صورت۔

(271)

اگر ہم دو دائرے ہوئے دائروں کے مرکزوں کو ملانے والے خط کی تقسیم نصف قطروں کی نسبت میں خارجاً نقطہ و پر اور داخلانقطہ و پر کریں تو دفعہ ۲۵ سے یہ ظاہر ہے کہ ان دو دائروں کے لئے و ہم وضعی مرکز اور و ضد ہم وضعی مرکز ہوگا۔



ہم نے قبل ازیں ان نقطوں کو ”مشابہت کے مرکز“ کہا ہے لیکن اب ہم دیکھتے ہیں کہ وہ صرف مشابہت کے مخصوص مراکز ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ مشابہت کے دوسرے مراکز بھی ہیں جو ان نقطوں کے خط میں واقع نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز ا ہے اور اس کے جواب میں دوسرے دائرہ کا مرکز ا ہے تو ہم ایک دائرہ کے کسی نقطہ ن کو دوسرے دائرہ کے کسی نقطہ ن کی نظیر میں لے سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ اس تناظر کے لئے مشابہت کا مرکز 'م' میں ہے۔
 مثلثات 'ن' میں 'ا'، 'ن'، 'م' میں 'ا'، 'ن'، 'م' اور
 'م' : 'ا' : 'ن' = 'ا' : 'ن' : 'و' = نصف قطروں کی نسبت
 اس لئے 'م' میں اس دائرہ پر واقع ہے جو 'و' پر ایسے قطر مانکر

(272)

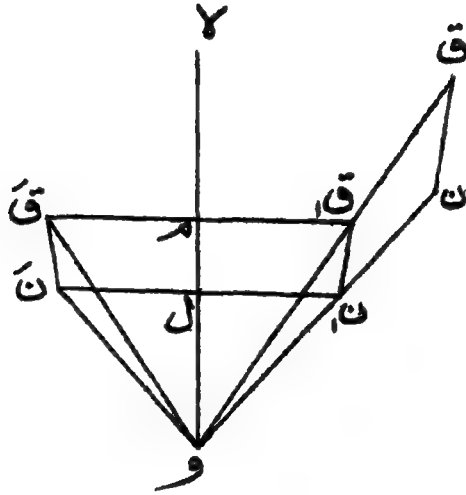
کھینچا گیا ہے (دفعہ ۲۷)
 اس لئے دوم مستوی دائروں کے لئے مشابہت کے مرکوزوں کا
 طریق وہ دائرہ ہے جو ہم، ضعیف اور صید ہم وضعی مرکوزوں کو ملائیو الے خط پر
 بنایا گیا ہو۔

اس دائرہ کو ہم مشابہت کا دائرہ کہہ چکے ہیں اور طالب علم اب
 سمجھ گیا ہو گا کہ اس کا یہ نام رکھنے کا سبب کیا ہے۔

۲۷۷۔ بالعکس مشابہ اشکال۔

اگر ایک مستوی میں 'ش' ایک شکل ہو اور اس مستوی میں 'ا' ایک
 ثابت نقطہ ہو اور اگر وہ سری شکل 'ش' اس طور پر حاصل کی جائے کہ شکل
 'ش' کے تقطوں 'ن' کے جواب میں اسی مستوی میں نقطے 'ن' ایسے

لئے جائیں کہ نسبت ون : ون مستقل ہو اور تمام زاویوں ن ون کا نصف ایک ہی خط ولا ہو تو اشکال مش اور مش کو بالعموم مشابہ کہا جاتا ہے اور کو معکوس مشابہت کا مرکز اور ولا کو معکوس مشابہت کا محور کہتے ہیں۔



ن ل محور ولا پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ وہ 'ون سے ن' پر ملتا ہے۔

چونکہ ولا 'ن ون کی تنصیف کرتا ہے اسلئے صریحاً

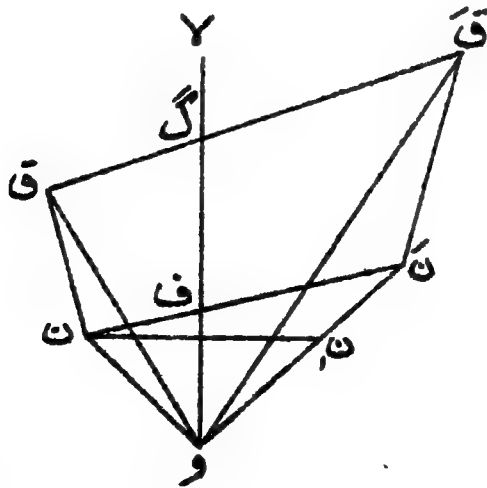
$$\Delta ون ن = \Delta ون ل$$

$$ون = ون$$

ون : ون مستقل ہے اس لئے وہ شکل جو نقطوں ن سے بنتی ہے شکل مش کے

ہم وضعی ہے۔ شکل مش کے متعلق بلاشبہ یہ سمجھا جاسکتا ہے کہ وہ شکل مش ہے جو مش کے ہم وضعی ہے مش کو محور ولا کے گرد دو قائمہ زاویوں میں سے

گھمانے سے بنی ہے۔
طالب علم کو بطور خودیہ ثابت کرنے میں کوئی مشکل نہیں ہوگی کہ اگر
مش اور مش کے مستوی میں وہیں سے گزریا کوئی خط و ما لیا جائے
اور اگر ن گ، و ما پر عمود کھینچا جائے اور ایسے ن تک اس طور پر
خارج کیا جائے کہ ن گ = گ ن، تو نمونہ ن کے نقطوں سے
جو شکل بنے گی وہ مش کے مشابہ ہوگی لیکن یہ دو شکلیں متشابہ ہوا واقع نہیں
ہونگی سوائے اس صورت کے جبکہ و ما، و لا پر منطبق ہو۔
۲۷۸۔ اگر شکل مش میں ن اور ق دو نقطے ہوں اور بالعکس
مش شکل مش میں نظیری نقطے ن اور ق ہوں تو آسانی سے یہ معلوم
ہوگا کہ ن ق : ن ق = مستقل نسبت = و ن : و ن اور ہم
دیکھتے ہیں کہ زاویہ ن و ق = زاویہ ق و ن (نکہ زاویہ ن و ق)
اس آخری نکتہ سے ہم راست مشابہ اشکال اور بالعکس مشابہ اشکال
کے درمیان فرق دیکھتے ہیں۔
۲۷۹۔ دو بالعکس مشابہ اشکال میں نظیری نقطوں کے دوزونج
دئے گئے ہوں تو مشابہت کا مرکز اور محور معلوم کرنا۔



(274) اس مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر n ، محور o کو f پر قطع کرے تو $n : f = n : n$ کیونکہ محور زاویہ n کی تنصیف کرتا ہے۔
 $n : f = n : n = n : n$ ۔
 اس لئے اگر n ، n ، n ، n دئے گئے ہیں تو n اور n کو ملاؤ اور ان خطوں کو f اور g پر نسبت $n : n$ میں تقسیم کرو تو خط f گ محور ہوگا۔
 نقطہ n ، محور کی دوسری جانب نقطہ n کے متشکل ہو تو نقطہ n اور محور کے تقاطع سے معلوم ہوگا۔
 نوٹ۔ اگر طالب علم کو مشابہ اشکال کے مضمون پر اس سے زیادہ مکمل بحث کے مطالعہ کا شوق ہو جو یہاں درج ہے تو اسے لاکلان (Lachlan) کی کتاب (Modern pure Geometry) کا نواں باب مطالعہ کرنا چاہئے۔

مشالیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ اگر ہم وضعی اشکال کی قائم تطویل کجائے تو وہ ہم وضعی اشکال میں مظلل ہو گئی۔
- ۲۔ اگر دو راست مشابہ یا بالعکس مشابہ اشکال میں نقطوں n ، n ، n ، n کے تین نظیری زوج ہوں تو مثلثات n ، n ، n اور n ، n ، n آپس میں مشابہ ہوں گے۔
- ۳۔ اگر دو مغنی میں اور میں راست مشابہ ہوں تو ثابت کرو کہ اگر میں کو کسی نقطہ کے گرد اسی مستوی میں گھمایا جائے تو میں کے مختلف محلوں میں میں اور میں کے مشابہت کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہوگا۔
- ۴۔ اگر دو مثلث جو راست مشابہ ہیں ایک ہی دائرہ میں کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ دائرہ کا مرکز مثلثوں کے مشابہت کا مرکز ہے۔

نیز ثابت کرو کہ ان مثلثوں کے نظیری اضلاع کے ازواج ایسے نقطوں میں متقاطع ہوتے ہیں جن سے بننے والا مثلث دئے ہوئے دو مثلثوں کے راست مشابہ ہوتا ہے۔

۵۔ اگر دو مثلث ایک ہی دائرہ میں ایسے کھینچے جائیں کہ وہ بالعکس متشابہ ہوں تو ثابت کرو کہ وہ منظرہ میں ہیں اور منظرہ کا محور دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔

۶۔ اگر ایک مثلث Δ ج ج کے ضلعوں ج ج، ج ا، ج ب پر نقطے لا، ما، مے ایسے لئے جائیں کہ مثلث لا ما مے مستطیل کا ہو تو ایسے مثلثوں کے نظام کے مشابہت کے مرکز کا طریق معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مثلث لا ما مے کے مرکز عمودی کا طریق یک خط مستقیم ہے۔

۷۔ اگر ایک مثلث Δ ج ج کے ضلعوں پر تین نقطے لا، ما، مے (275) راسوں ا، ب، ج کے مقابل لئے جائیں اور اگر تین متشابہ اور متشابہ واقع قطعات ناقص مثلثات ا ما مے، ب مے لا، ج لا ما مے گرد کھینچے جائیں تو ان قطعات ناقص میں ایک نقطہ مشترک ہوگا۔

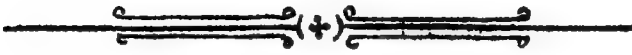
۸۔ دو دئے ہوئے دائروں کا مشابہت کا دائرہ اس ہم محور نظام سے متعلق ہوتا ہے جس کے انتہائی نقطے دئے ہوئے دو دائروں کے مرکز ہوں۔

۹۔ اگر دو ہم مستوی دائرے بالعکس مشابہ سمجھے جائیں تو مشابہت کے مرکز کا طریق ”مشابہت کا دائرہ“ ہوتا ہے اور مشابہت کا محور ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

۱۰۔ دو ہم مستوی دائروں پر جنہیں بالعکس مشابہ سمجھا گیا ہے دو نظیری نقطے ن اور ن ہیں اور اس صورت میں مشابہت کا مرکز س ہے۔ ن میں سے گزرنے والے قطر کا دوسرا سرا ق ہے اور جب ق اور ن ان دو شکلوں میں معکوس مشابہت کے لئے نظیری نقطے ہوتے ہیں تو س مشابہت کا مرکز ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ س س، مشابہت کے دائرہ کا ایک قطر ہے۔

۱۱۔ ا ب ج د ایک دائری چار ضلعی ہے، ا ج اور ج د

نقطہ ع پر متقاطع ہوتے ہیں اور ا د اور ب ج نقطہ ف پر۔ ا ب اور ج د پر انہیں قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ع ف اس دائرہ قطر ہے جو ا ب اور ج د پر گئے دائروں کے لئے مشابہت کا دائرہ ہے۔
 ۱۲۔ نقلیل کے ذریعہ اس مسئلہ کی تقسیم کرو کہ دو دائروں کا مشابہت کا دائرہ ان کے ہم محو ہوتا ہے۔



متفرق مثالیں

(276)

۱۔ ثابت کرو کہ جب چار نقطے 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں تو چار مثلثوں 'ب'ج'د، 'ج'د'ا، 'د'ا'ب، 'ا'ب'ج کے مرکز عمودی ایک مساوی دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور یہ کہ وہ خط جو ان دائروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے اوسط محل کے مرکز سے تین اور ایک کی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے۔

۲۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مثلث ہے، اس کے اندرونی دائرہ کا مرکز وہ ہے اور 'ا'، 'ب'، 'ج' ان دائروں کے مرکز ہیں جو علی الترتیب اضلاع 'ب'ج'، 'ج'ا'، 'ا'ب' کو مس کر نیوالے جانی دائرے ہیں۔ لی، 'م'، 'ن' وہ نقطے ہیں جہاں اضلاع 'ب'ج'، 'ج'ا'، 'ا'ب' زاویوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے ناصفوں سے منقطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ تین مثلثوں 'ل'، 'ب'، 'ج'، 'م'، 'ج'، 'ا'، 'ن'، 'ا'، 'ب' کے عمودی مرکزوں سے ایک مثلث بنتا ہے جو 'ا'، 'ب'، 'ج' کے متشابه اور متشابه واقع ہوتا ہے اور اس کا مرکز عمودی وہ ہے۔

۳۔ 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک مثلث ہے اور اس کا اندرونی دائرہ 'ا'، 'ب'، 'ج' کے مقابل اضلاع کو علی الترتیب نقطوں 'ل'، 'م'، 'ن' پر مس کرتا ہے۔

ب اور ج کے لحاظ سے 'ل' کا موسیقی مزدوج 'ل' لیا گیا ہے، اور اسی طرح

مہم اور ن، ٹے گئے ہیں۔ ل، ل، م، م، ن، ن کے وسطی نقطے
ن، ق، س، ہا ہیں۔ نیز ل، ل، زاویہ کا نصف ہے جو ج کو ل پر
قطع کرتا ہے اور ل، ج اور ج کے لحاظ سے ل، کا موسیقی مزدوج ہے، اسی طرح
ج، اور ج، ٹے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ خط ل، ج، ج، خط ن، ق، کا
کے متوازی ہے۔

۴۔ اب ج ایک مثلث ہے جس کے اندرونی دائرہ کامركز و اور
حاصل دائرہ کامركز وہے اور باہمی دائروں کے مركز وہ، وہ، وہ ہیں۔
و، و، و اضلاع اب اور ب ج سے علی الترتیب ل اور
م پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ و، و، و الی م پر عمود ہے۔

۵۔ اگر ایک دئے ہوئے مثلث کے اضلاع پر انہیں قطر مکرر اترے کھینچے جائیں اور ان دائروں میں چار ضلعی کھینچے جائیں جن کے وتر مرکز عمودی پر متقاطع ہوں اور ہر ایک کا ایک ضلع متناظر عمود کے اوپر کے منقطعہ کے وسطی نقطہ میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ ان چار ضلعیوں کے وہ اضلاع جو مذکورہ اضلاع کے مقابل ہیں ایک مثلث بناتے ہیں جو دئے ہوئے مثلث کے ساتھ مساوی الزاویہ ہے۔

۶۔ دودائزے ایسے ہیں کہ ایک میں ایک چار ضلعی کھینچا جاسکتا ہے جس کے اضلاع دوسرے دائرہ کو مس کرتے ہیں مگر ضلعوں کے نقاط تماس 'ن' 'ق' 'ر' 'س' ہوں تو ثابت کرو کہ 'ن' 'ق' 'ر' 'س' کے وتر علی التمام ہیں اور 'ن' 'ق' 'ر' 'س' اور 'ق' 'ر' 'س' 'ن' کے نقاط تقاطع ایک ہی ثابت خط پر واقع ہوتے ہیں۔

۷۔ مثلث ا ب ج کے راس ا میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو اضلاع ج ا، ا ب کے نقاط وسطی ع اور ف کو قاعدہ کے نقطہ وسطی د کے ساتھ ملانے والے خطوط مستقیم د ع اور د ف سے نقطوں

لا اور ما پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ما ج لا کے متوازی ہے۔
 ۸۔ چار متقاطع خطوط ایک مستوی میں کھینچے گئے ہیں۔ اس مستوی کے کسی نقطہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کا متکافی معلوم کرو کہ ان چار خطوں سے بنے دو مثلثوں کے حاکم دائرے ایک مشترک نقطہ میں سے گزرتے ہیں جو ان کے مرکزوں کے ساتھ ہم دائرہ ہے۔

۹۔ ایک قطع زائد پر ع اور ف دو ثابت نقطے ہیں اور ن ایک متحرک نقطہ ہے۔ ن ع ایک متقارب سے ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ع میں سے گزرنے والا وہ خط جو دوسرے متقارب کے متوازی ہے اس خط سے جو ق میں سے گزرتا ہے اور ن ف کے متوازی ہے ایک ثابت نقطہ پر ملتا ہے۔

۱۰۔ کوئی قطع مکانی دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرتا ہوا کھینچا گیا ہے اور اس کا مرتب ایک ثابت نقطہ ن میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مکانی کے لحاظ سے نقطہ ن کے قطبی کا لفاف ایک مخروطی ہے۔
 ۱۱۔ بتاؤ کہ دی ہوئی شکل کا ایک مثلث کس طرح بنایا جاسکتا ہے جس کے ضلع تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گزریں۔

۱۲۔ ایک قطع زائد کھینچو جس کے متقارب ایک دئے ہوئے مثلث کے دو ضلع ہوں اور جس کا ایک عماد مثلث کا قاعدہ ہو۔

۱۳۔ ایک قطع ناقص کا ایک تماس کھینچا گیا ہے اس طور پر کہ تماس کا وہ حصہ جو مساوی مزدوج قطروں سے منقطع ہوتا ہے اقل ہے۔ ثابت کرو کہ یہ حصہ نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے۔

۱۴۔ ایک متوازی الاضلاع، ایک نقطہ اور ایک خط مستقیم ایک ہی مستوی میں دئے گئے ہیں۔ ایک ایسا خط کھینچنے کے لئے عمل معلوم کرو (جو صرف میٹری پر منحصر ہو) کہ وہ دئے ہوئے نقطہ میں سے گزرے اور دئے ہوئے خط کے متوازی ہو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کو بنانیکا مسئلہ جس کے اضلاع تین

ثابت نقطوں میں سے گزریں اور جس کے راس تین ثابت خطوط مستقیم پر واقع ہوئے
ہے جبکہ تین دئے ہوئے نقطے ہم خط ہوں اور تین دئے ہوئے
خطوط مستقیم ہم نقط ہوں۔

۱۶۔ ایک مستوی میں 'ا' 'ب' 'ج' 'د' چار نقطے ہیں جن میں سے
کوئی تین ہم خط نہیں ہیں اور ایک ظنی استحالہ 'ا' اور 'ب' کو باہم اور نیز 'ج'
اور 'د' کو باہم تبدیل کرتا ہے۔ اس نقطہ کے لئے پنسل اور پٹری کا عمل بناؤ
جس میں کوئی اختیاری نقطہ 'ن' تبدیل ہوتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ 'ا' 'ب' 'ج'
'د' سے گزرنی والا کوئی مخروطی خود میں تبدیل ہوتا ہے۔

(278)

۱۷۔ تین قطعات زائد کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک کے پاس 'ب'
اور 'ج' دوسرے کے 'ج' اور 'ا' اور تیسرے کے 'ا' اور 'ب' ہیں اور جو
علی الترتیب 'ا' 'ب' 'ج' میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ قطعات زائد
دو مشترک نقطہ 'ن' اور ق رکھتے ہیں اور ایک مخروطی ایسا موجود ہے
جو 'ا' 'ب' 'ج' کو محیط کرتا ہے اور جس کے پاس 'ن' اور ق ہیں۔

۱۸۔ تین مثلثوں کے قاعدے ایک دئے ہوئے خط پر اور ان کے
راس ایک دوسرے دئے ہوئے خط پر ہیں۔ مثلثوں کے ہر زوج میں ایک
مثلث کا ایک ضلع اور دوسرے مثلث کا ایک ضلع لیکر ان دو ضلعوں کے
نقطہ تقاطع کو ان مثلثوں کے دوسرے دو ضلعوں کے نقطہ تقاطع کے ساتھ
ملانے سے چہ خطوط حاصل کئے گئے ہیں ان خطوں کے حاصل کرنے میں مثلثوں کے
ازواج اور ضلعوں کے ازواج ہر ممکن طریقہ پر منتخب کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ
یہ چہ خطوط ایک مکمل چار زاوی بناتے ہیں۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ حسب ذیل سلسلہ کے بالعموم چار جدا گانہ حل ہیں:
دو مخروطی کھینچنا جس کا پاسکہ ایک دیا ہوا نقطہ ہو اور جو دوسرے دئے
ہوئے نقطوں پر علی القوائم متقاطع ہوں۔

ہر صورت میں دو دئے ہوئے نقطوں پر کے پاس معلوم کرو۔
۲۰۔ ایک متساوی الاضلاع مثلث ایک ایسے دائرہ میں کھینچا گیا ہے

جس کا مرکز وہ ہے۔ دو ایسے قطعات زائد کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک کا ماسکہ ج ہے اور مرتب و ا ہے اور وہ (زائد) ب میں سے گذرتا ہے، دوسرے کا ماسکہ ج ہے اور مرتب و ب ہے اور وہ (زائد) ا میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ قطعات زائد دائرہ سے آٹھ نقطوں پر ملتے ہیں اور یہ نقطے اور نقطہ ج ملکر ایک منتظم نو ضلعی کے راس بنتے ہیں۔

۲۱۔ ایک قطع ناقص جس کا مرکز وہ ہے ایک مثلث (ب ج کے ضلعوں کو مس کرتا ہے اور و ا، و ب، و ج کے مزدوج قطر کسی حاس سے علی الترتیب د، ع، ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا، د، ب، ع، ج، ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

۲۲۔ ایک قطع مکانی ایک ثابت خط مستقیم کو ایک دئے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے اور اس کا محور ایک دوسرے دئے ہوئے نقطہ میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ راس پر کے حاس کا لغاف ایک قطع مکانی ہے اس مکانی کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو۔

۲۳۔ تین قطعات مکانی ایک دیا ہوا مشترک حاس رکھتے ہیں اور ایک دوسرے کو نقطوں ن، ق، س پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ ن، ق، س، ا ہم خط ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ وہ قطع مکانی جو دئے ہوئے خط کو اور ن، ق، س پر کے حاسوں کو مس کرتا ہے اپنا محور ن، ق، س کے متوازی رکھتا ہے۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک قطع مکانی اور اس کے دائرہ انحناء کے مشترک وتر کے وسطی نقطہ کا طریق دوسرا قطع مکانی ہے جس کا وتر خاص دئے ہوئے مکانی کے وتر خاص کا پانچواں حصہ ہے۔

(279)

۲۵۔ تین دائرے ایک دئے ہوئے نقطہ و میں سے گذرتے ہیں اور ان کے دوسرے نقاط تقاطع ا، ب، ج ہیں۔ دائرہ و ب ج پر ایک نقطہ د، دائرہ و ج ا پر ایک نقطہ ع اور دائرہ و ا ب پر ایک نقطہ ف لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ا ف x ب x ج x ع

= ف ب x د ج x ع ا جہاں ا ف سے د تر ا ف مراد ہے اور علی اندازہ تو 'د' 'ع' 'ف' ہم دائرہ ہیں۔ نیز علامتوں کی جو قرار داد اختیار کرنی ہوگی واضح کرو۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ دو ہم ماسکی قطعات مکانی کے ایک مشترک ماس کے محاذی ماسک پر ایسا زاویہ بنتا ہے جو مکانیوں کے محوروں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۲۷۔ ایک مثلث ا ب ج کے راس ا، ب ثابت ہیں اور زاویہ ا کے ناصف کا پائین ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہے۔ ج کا طریق معلوم کرو۔

۲۸۔ ایک خط مستقیم ا ب ج د، دو ثابت دائروں لا اور ما کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ لا کا وتر ا ب، ما کے وتر ج د کے مساوی ہے۔ لا کے نقطوں ا اور ب پر کے ماس، ما کے نقطوں ج اور د پر کے ماسوں سے چار نقطوں ن، ق، س، ہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن، ق، س، ہ میں ایک ثابت دائرہ پر واقع ہیں۔

۲۹۔ ایک ثابت خط مستقیم ا ب پر دو نقطے ن اور ق ایسے لئے گئے ہیں کہ ن ق کا طول مستقل ہے۔ لا اور ما دو ثابت نقطے ہیں اور لا ن اور ما ق ایک نقطہ ہ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جیسے ن، ا ب پر حرکت کرتا ہے س کا طریق ایک قطع زائد ہے جس کا ایک متقارب ا ب ہے۔

۳۰۔ ایک قطع مکانی ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو علی الترتیب د، ع، ف پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں جو مثلث ا ب ج کے مرکز ثقل کے قطبی پر واقع ہے۔

۳۱۔ اگر دو مخروطی ایک ہی چار ضلعی میں کھینچے جائیں تو ان کے نقاط تقاطع میں سے کسی پر کے دو ماس چار ضلعی کے کسی وتر کو موسیقی طور پر قطع کریں گے۔

۳۲۔ ایک مثلث (ب ج میں ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جس کا مرکز وہ ہے دائرہ کے کسی نقطہ ن پر کا ماس ب ج کو د پر قطع کرتا ہے۔ و میں سے گزرنیوالا وہ خط جو و د پر عمود ہے ن د سے د پر ملتا ہے۔ سطح متناظر نقطے ع ک معلوم کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ (د ک ب ع ج ف متوازی ہیں۔

۳۳۔ ایک دائرہ پر دو نقطے اس طریقہ سے لئے گئے ہیں کہ ایک ثابت نقطہ سے ان کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اس وتر کا لفاف جو ان دو نقطوں کو ملاتا ہے ایک قطع مکانی ہے۔

۳۴۔ ایک متغیر خط ن ق دو ثابت خطوں کو نقطوں ن اور ق پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ ایک تیسرے ثابت خط پر ن ق کے قائم قیل کا طول مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ ن ق کا لفاف ایک قطع مکانی ہے نیز اس کے محور کی سمت معلوم کرو۔

۳۵۔ ایک دئے ہوئے قطع ناقص (ا) کے ایک ماسک کو ماسک اور (280) کسی نقطہ ن پر کے ماس کو مرتب مانکر ایک دوسرا قطع ناقص (ب) کھینچا گیا ہے جو (ا) کے مشابہ ہے۔ ثابت کرو کہ (ب) (ا) کے محور صغیر کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے جہاں ن پر کا ماس اس سے ملتا ہے۔

۳۶۔ ایک قطع مکانی دو ثابت خطوں کو جو ت پر متقاطع ہوتے ہیں مس کرتا ہے اور اس کا محور ایک ثابت نقطہ د میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ماس ماسک ہو تو زاویہ د ماس کا نصف سمت میں ثابت ہے نیز ثابت کرو کہ ماس کا طریق ایک قائم زاویہ ہے جس کے ایک قطر کے سرے د اور ت ہیں۔ اس کے متقاربوں کی سمتیں کیا ہونگی؟

۳۷۔ اگر ایک قطع ناقص کا ایک ماسک دیا گیا ہو اور قطع ناقص دو ثابت خطوط مستقیم کو مس کرے تو ثابت کرو کہ مرتب دائرہ دو ثابت نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

۳۸۔ ایک مثلث (ب ج کے مستوی میں و کوئی نقطہ ہے اور

میں پرکھائی ہے۔ ثابت کرو کہ تین خط $(\text{ا} \text{ن} \text{ب} \text{ق})$ 'ج' کے نقطہ میں
 ۴۳۔ ایک دئے ہوئے دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ایک دئے ہوئے
 دائرہ کے مماس $\text{ن} \text{ق}$ 'ن' ق کھینچے گئے ہیں، اس دوسرے دائرہ کا مرکز
 پہلے دائرہ کے محیط پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ ان نقطوں کو ملائیے والا وتر جہاں
 یہ مماس پہلے دائرہ کو قطع کرتے ہیں سمت میں ثابت ہے اور $\text{ق} \text{ق} \text{ن}$ کو
 مرکزوں کے خط پر قطع کرتا ہے۔

(281)

۴۴۔ اگر کوئی قطع مکانی ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔
 کھینچا جائے تو ہر وتر مماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

۴۵۔ ۱ اور ۲ 'ب' ایک قطع زائد کی مخالف شاخوں پر واقع ہیں۔
 ۱ کے وسطی نقطہ د سے مماس $\text{د} \text{ن}$ کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ
 اگر $\text{ج} \text{ق}$ اور $\text{ج} \text{ا}$ وہ نیم قطر ہوں جو ۱ اور ۲ کے متوازی ہیں
 ۱ : ۲ = $\text{ج} \text{ق} : \text{ج} \text{ا}$

۴۶۔ ایک مثلث ۱ ۲ ۳ کے ضلع ۱ ۲ پر اور ۲ پر
 تین مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ مثلث کے اندر دائرے کھینچے گئے
 ہیں جنہیں سے ایک دائرہ ۱ ۲ پر اور ۲ پر اور ۳ پر مس کرتا
 ہے اور دوسرا ۱ ۲ پر اور ۳ پر اور ۱ پر مس کرتا ہے۔ اگر
 دائرے ایک دوسرے کو ۱ پر مس کریں تو ثابت کرو کہ $\text{ج} \text{ا}$ اور $\text{ج} \text{ب}$
 ۱ میں سے گزرتے ہیں۔

۴۷۔ ۱ ۲ ۳ ایک مثلث ہے اور ۱ ۲ 'ب' 'ج' سے مقابل کے
 اضلاع پر عمود کھینچے گئے ہیں جو ان ضلعوں سے علی الترتیب ۱ ۲ ۳
 پر ملتے ہیں۔ تین مخروطی کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک ۱ ۲ پر اور ۳
 کو علی الترتیب ۱ ۲ اور ۳ پر مس کرتا ہے اور ۱ میں سے گزرتا ہے
 دوسرا ۱ ۲ پر اور ۳ کو ۱ پر مس کرتا ہے اور ۲ میں سے
 گزرتا ہے، تیسرا ۱ ۲ پر اور ۳ کو ۱ پر مس کرتا ہے اور ۳
 میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ۱ ۲ 'ب' 'ج' پر وہ تمام ایک ہی مخروطی

مس کرتے ہیں۔

۴۸۔ ایک قطع مکانی دو ثابت خطوں کو جو ت پر تقاطع ہوتے ہیں مس کرتا ہے اور وتر تاس ایک ثابت نقطہ (۱) میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مرتب ایک ثابت نقطہ (۲) میں سے گذرتا ہے اور نسبت (۱) و (۲) کے تمام محلوں کے لئے ایک ہی رہتی ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ اگر (۱) ایک دائرہ پر حرکت کرے جب کام کرت ہو تو (۲) ہمیشہ ایک قطع ناقص کا عماد ہو گا جس کے نیم محوروں کا مجموعہ اس دائرہ کا نصف قطر ہو گا۔

۴۹۔ ایک دائرہ ہوئے دائرہ میں ایسے مثلث کھینچے گئے ہیں جن کا مرکز ہندسی دیا ہوا ہے ان مثلثوں میں ایسے مخروطی کھینچے گئے ہیں کہ دیا ہوا مشترک مرکز ہندسی ان کا مرکز ہے۔ ثابت کرو کہ یہ تمام مخروطی ایک ہی مرتب دائرہ رکھتے ہیں۔

۵۰۔ ایک قائم الزاویہ مثلث کا اندرونی دائرہ اور وہ جانبی دائرہ کھینچے گئے ہیں جو قائم الزاویہ بنانے والے ضلعوں میں سے ایک کو مس کرتا ہے ثابت کرو کہ ہر دائرہ و تمام اس ضلع کو جن نقطوں پر مس کرتا ہے ان کو ملا کر ایک خطو علی القوائم تقاطع ہوتے ہیں اور انہیں خارج کرنے پر ان میں سے ہر ایک اس نقطہ میں سے گذرتا ہے جس پر دوسرا دائرہ باقی ضلع کو مس کرتا ہے نیز ثابت کرو کہ ان خطوں میں سے کسی ایک خط پر کسی نقطہ کے قطبی بلحاظ دو دائروں کے دوسرے خط پر ملتے ہیں اور اس سے یہ نتیجہ اخذ کرو کہ اگر ان خطوں میں سے کسی ایک خط پر کسی نقطہ سے دائروں کے چار تاس کھینچے جائیں تو وہ ایک موسیقی پنل بتاتے ہیں۔

۵۱۔ اگر ایک مثلث ن ق س ایک مخروطی کو محیط کرے جس کا مرکز ج ہے اور اگر ق اور س سے علی الترتیب قطروں ج س اور ج ق پر معین کھینچے جائیں تو معینوں کے پائمن کو ملانے والا خط ن ق اور ن س کے نقاط تاس میں سے گذریگا۔

۵۲۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی اور کسی نقطہ پر اس کے دائرہ انحراف کا مشترک

وتر اور اس نقطہ پر ان کا مشترک ماس خود اپنے مشترک ماس کی موسیقی طور پر تقسیم کرتے ہیں۔

۵۳۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی اور ایک لٹمی دائرہ کے دو مشترک ماسوں کا نقطہ تقاطع اسی ہم ماسکی مخروطی پر واقع ہوتا ہے جو نقطہ لٹم میں سے گذرتا ہے۔

۵۴۔ ایک مثلث ا ب ج میں ضلعوں پر عمود ا ل، ب م، ج ن ہیں اور م ن، ن ل، ل م کو جب خارج کیا جاتا ہے تو وہ ب ج، ج ا، ا ب سے ن، ق، سر پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ نقطہ ن، ق، سر، مثلث ا ب ج کے نو نقطہ دائرہ اور حائلہ دائرہ کے بنیادی محور پر واقع ہیں اور یہ کہ ا ل، ن، ب م، ق، ج ن سر کے حائلہ دائروں کے مرکز ایک خط مستقیم پر واقع ہیں۔

۵۵۔ ایک قائم زائد کے ماسوں میں سے گزرنے والے ایک دائرہ کو زائد کے لحاظ سے متکافی کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا متکافی ایک قطع ناقص ہے جس کا ایک ماسکہ زائد کے مرکز پر ہے اور جس کا محور اصغر اس فاصلہ کے مساوی ہے جو زائد کے مرتبوں کے درمیان ہے۔

۵۶۔ ایک دائرہ تین دئے ہوئے دائروں کو علی القواہم قطع کرتا ہوا کھینچا جاسکتا ہے۔ اگر اس دائرہ پر کوئی نقطہ لیا جائے تو تین دائروں کے لحاظ سے اس کے قطبی ہم نقطہ ہونگے۔

۵۷۔ کسی نقطہ سے دو ہم ماسکی مخروطیوں کے ماس و ن، و ن، وق، وق کھینچے گئے ہیں جنہیں و ن، و ن، ایک مخروطی کو مس کرتے ہیں اور وق، وق، دوسرے کو۔ ثابت کرو کہ چار خطوط ن ق، ن ق، ن ق، ن ق سب کے سب ایک تیسرے ہم ماسکی مخروطی کو مس کرتے ہیں۔

۵۸۔ ایک خط مستقیم ن ق، ق دو مخروطیوں ع اور ط کو علی الترتیب نقطوں ن، ن اور ق، ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

اُس چار زاویوں کے راس جس کے متقابل اضلاع کے (ازواج 'ن' 'ن' اور 'ق' 'ق' پر کے تماس میں ایک مخروطی پرواقع ہیں جو 'ع' اور 'ط' کے چار نقاط تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۵۹۔ اگر دو قطعات مکانی ایک حقیقی مشترک خود مزدوج مثلث رکھتے ہوں تو وہ مشترک ماسکہ نہیں رکھ سکتے۔

۶۰۔ ایک مخروطی کے نقطوں 'ا' اور 'ب' پر کے تماس 'ت' پر ملتے ہیں اور 'ا' 'ب' پر کے تماس 'ت' پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$ت(ا)ب(ب) = ت(ا)ب(ب)$$

۶۱۔ ایک دائرہ ایک مستوی میں حرکت کرتا ہے اور ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے اور ایک ثابت نقطہ سے اس متحرک دائرہ کے تماس کا طول ہمیشہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ متحرک دائرہ ہمیشہ ایک دوسرے ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۶۲۔ ایک ثابت نقطہ 'ن' سے دائروں کے ایک ہم محور نظام کے تماس کھینچے گئے ہیں اور تماسوں کے ہر زوج اور بنیادی محور سے مثلثوں کا ایک نظام حاصل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر 'ن' ہم محور نظام کے لحاظ سے ایک انتہائی نقطہ کے قطبی پرواقع ہو تو مثلثوں کے حائط دائرے ایک دوسرے ہم محور نظام بناتے ہیں۔

(282)

۶۳۔ دو دائرے ہوں 'ن' اور 'ن' اور 'ب' اور 'ب' پر تقاطع ہوتے ہیں 'ا' میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے جو دائروں کو مکمر 'ن' اور 'ن' پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے دوسرے نقطہ تقاطع کا طریق جنہیں سے ایک 'ب' 'ن' میں سے گذرتا ہے اور 'ن' کو علی القوائم قطع کرتا ہے اور دوسرا 'ب' 'ن' میں سے گذرتا ہے اور 'ن' کو علی القوائم قطع کرتا ہے وہ خط مستقیم ہے جو 'ب' میں سے گذرتا ہے اور 'ا' 'ب' پر عمود ہے۔

۶۴۔ چار نقطے ایک دائرہ پرواقع ہیں انہیں سے ہر ایک کا خط پائین اُس مثلث کے لحاظ سے جو دیگر تین نقطوں سے بنتا ہے معلوم کیا گیا ہے۔

ایسی تین سہیتیں ہوں کہ (ا ب ج د) \times (ا م ا ج ع) \times (ا ب ع ف) = ا
اور ا د 'ب' ج 'ع' ج ف ہم نقطہ ہوں تو لا 'ما' سے ہم خط ہونگے۔

۱۔ اگر ا ب ج ایک مثلث ہو اور ب ج پر کوئی نقطہ د ہو تو (ا)

ا ب د اور ا ج د کے رابطہ مرکزوں کو ملانے والا خط ایک قطع مکانی کو مس

کرے گا (۲) اندرونی مرکزوں کو ملانے والا خط ایک مخروطی کرے گا جو زاویوں

ا ب ج 'ا ج ب' کے ناصفوں کو مس کرتا ہے۔

اس خط کا لفاف معلوم کر دو جو ان جاہی دائروں کے مرکزوں کو ملاتا ہے

جو علی الترتیب اضلاع ب د 'ج د' کو مس کرتے ہیں۔

۲۔ دو متغیر دائرے میں اور میں 'دو ثابت دائروں کو مس کرتے

ہیں۔ ان نقطوں کا طریق معلوم کر دو جن کے قطبی بلحاظ میں اور میں کے

ایک ہی ہوں۔

۳۔ ایک قطع ناقص کے مماس ق ن 'ق ن' ہیں اور ق م

وتر مماس ن ن پر عمود ہے اور گ 'ق م' کا قطب ہے۔ اگر مثلث

ن و ن کا مرکز عمودی ہل ہو تو ثابت کرو کہ گ 'ق ج' پر عمود ہے

۴۔ دو دائرے ایک دوسرے کو و پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ان نقطوں کا طریق جو ایسے دائروں کے مماس سے و کے متقارب ہوں جو دو

دائروں کو و پر مس کرتے ہیں ایک دوسرا دائرہ ہے جو دے ہوئے

دائروں کو و پر مس کرتا ہے۔ نیز اس دائرہ کا نصف قطر دے ہوئے دائروں کے

نصف قطروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ ایک قطع مکانی کے نقاط ا اور ج پر کے مماس اور

وتر ا ج 'ب' میں سے گزرنے والے قطر سے ایسے نقطوں ا ج 'ب' پر

لگتے ہیں کہ ا ب : ب ب = ا ب : ب ج = ب ب : ج ب جہاں

ب مکانی پر ایک تیسرا نقطہ ہے۔ اس کی مدد سے ایک دے ہوئے نقطہ

میں سے مکانی کا ایک وتر کھینچو جو اس نقطہ پر ایک دی ہوئی نسبت میں تقسیم

ہو جائے۔ اس مسئلہ کے کتنے مختلف حل ہیں۔

(284)

۷۔ اگر ایک قطع زائد پر تین نقطے 'ا' 'ب' 'ج' ہوں اور دونوں متقارب ہوگی سمتیں دی گئی ہوں تو 'ب' پر کا ماس کھینچنے کے لئے ذیل کا عمل ثابت کرو:۔
 ۱ میں سے ایک متقارب کے متوازی ایک خط کھینچو جو 'ب' 'ج' کو دہرے پر ملے ہے۔
 ۲ میں سے دوسرے متقارب کے متوازی ایک خط کھینچو جو 'ا' 'ب' کو دہرے پر ملے ہے۔
 ۳ 'د' کو ملاؤ اور 'ب' میں سے 'د' کے متوازی خط کھینچو۔ یہی 'ب' پر کا ماس ہوگا۔

۸۔ ایک دائرہ تین دئے ہوئے دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے، ان دائروں کو مسا' 'ا' 'ب' 'ج' سے موسوم کر کے ثابت کرو کہ وہ نقطے جہاں 'ج' مسا کو قطع کرتا ہے وہ نقطے ہیں جہاں 'ا' اور 'ب' کے ہم محور دائرے 'ج' کو مس کرتے ہیں۔

۹۔ اگر دو ہم مستوی مثلثات 'ا' 'ج' 'ب' 'د' 'ع' 'ف' ہوں اور 'س' ایک ایسا نقطہ ہو کہ 'س' 'د' 'س' 'ع' 'س' 'ف' 'اضلاع' 'ب' 'ج' 'ج' 'ا' 'ب' کو علی الترتیب تین ہم خط نقطوں میں قطع کرتے ہیں تو 'س' 'ا' 'س' 'ب' 'س' 'ج' 'اضلاع' 'ع' 'ف' 'د' 'د' 'ع' کو تین ہم خط نقطوں پر قطع کریں گے۔

۱۰۔ 'ا' 'ب' 'ج' ایک مثلث ہے، اسکے اُس جانبی دائرہ کا نقطہ تماس جو 'ب' 'ج' کو مس کرتا ہے نقطہ 'د' ہے، اسی طرح 'ج' 'ا' اور 'ا' 'ب' پر نقاط تماس 'ع' اور 'ف' معلوم کئے گئے ہیں۔ 'ب' 'ج' 'ج' 'ا' 'ا' 'ب' کے وسطی نقطوں میں سے خطوط علی الترتیب 'ا' 'د' 'ب' 'ع' 'ج' 'ف' کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ خطوط اندرونی مرکز پر ملتے ہیں۔

تمت بالجبر

اشاریہ

علم ہندو نظری

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

- امدادی دائرہ ، ۲۱۷ ، ۲۲۵ ، ۲۴۳ ، ۲۹۷
 انتہائی نقطے ، ۳۰
 اندرونی دائرہ ، ۱۳ ، ۳۷۱
 بریائتوں کا مسئلہ ، ۳۱۰
 بنیادی متحدہ ، ۲۵
 پیاسکال کا مسئلہ ، ۳۰۸
 تقسیم بذریعہ تطویل ، ۳۵۴
 جانبی دائرے ، ۱۳ ، ۳۷۱
 چار زاویے ، ۱۱۰ ، ۳۱۸ ، ۳۲۰
 چار ضلعی ، ۱۰۸ ، ۱۷۷ ، ۳۱۸ ، ۳۲۰ ، ۳۵۲
 حلقہ دائرہ ، ۱ ، ۷ ، ۱۹۴ ، ۳۴۸
 خط پائین ، ۸ ، ۱۹۴

- خطوط وسطیٰ، ۱۱
 خود مزدوج مثلث، ۲۳، ۱۷۷، ۳۳۷، ۳۴۸
 دائرہ انحناء، ۱۷۶، ۲۰۱، ۲۳۲، ۲۷۲
 دائری نقطہ، ۳۴۴
 درپہنچ جانچ، ۱۱۶
 درپہنچ خواص، ۱۲۲، ۱۳۵، ۳۱۲، ۳۲۱، ۳۲۵
 دو ہزار تاس، ۳۴۹، ۳۵۸
 ڈیسارگ کا مسئلہ، ۳۲۵
 ذہن اربعۃ الاضلاع، ۱۰۸، ۱۷۷، ۲۱۸، ۳۲۰، ۳۲۳، ۳۵۲
 زیر عماد، ۱۸۷
 سامن کا مسئلہ، ۲۴
 سمن کا خط، ۹
 سیوا کا مسئلہ، ۴۸
 شبہ وسطیٰ، ۵۳
 ضد متوازی، ۵۴
 طریق، ۳۴، ۱۸۶، ۲۰۰، ۲۲۴، ۲۶۲
 ظلی خواص، ۶۳، ۷۱، ۷۶، ۱۳۳
 علامتیں، ۴۰، ۱۷۳، ۲۶۳
 علی القوائم دائرے، ۳۱، ۱۰۴
 عماد، ۱۶۴، ۱۸۶، ۲۱۳، ۲۱۹، ۲۴۲، ۲۷۱
 فویر باخ کا مسئلہ، ۳۷۱
 قائم درپہنچ، ۱۲۴، ۱۳۶
 قطب (دور قطبی)، ۱۹، ۱۳۳، ۳۲۸
 قطر، ۱۵۴، ۱۹۳
 کارنو کا مسئلہ، ۱۶۹

لفافہ ۱۹۰، ۲۱۶، ۳۰۶
 ماسکہ اور مرتبہ ۱۳۲، ۱۳۶، ۱۴۰، ۱۵۴، ۳۳۳، ۳۵۰
 مبدل ۱۹۹
 متساوی الزاویہ مزدوج ۵۲
 متشابه اشکال ۳۸۱
 متقارب ۱۴۹، ۱۵۵
 متکافی اشکال ۳۱۶، ۳۳۹
 متوازی وتر ۱۳۸
 مثلثات منظرہ میں ۹۱
 محاورہ ۱۴۶، ۱۵۱، ۱۵۵، ۲۴۵
 مرتب دائرہ ۲۲۱، ۲۴۸
 مرکز عمودی ۲، ۱۹۵، ۲۸۲، ۳۳۲
 مزدوج زائد ۲۴۹
 مزدوج قطر ۲۲۲، ۲۲۸، ۲۵۵، ۲۷۹
 مزدوج نقطے اور خطوط ۲۲، ۱۰۶
 مساوی مزدوج ۲۲۹
 مشابہت کا دائرہ ۳۵، ۳۸۵
 مشابہت کے مرکز ۳۴
 معین ۱۵۵
 منقولہ نقطے ۱۹، ۳۶۳، ۳۷۰
 ماس ۱۵۴، ۱۸۶، ۲۱۲، ۲۴۱
 ماسوں کا زوج ۱۶۱، ۱۹۰، ۲۱۴، ۲۲۰، ۲۴۶
 موسیقی خواص ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۳۳
 مینلا س کا مسئلہ ۴۵
 نو نقطی دائرہ ۴، ۲۸۴، ۳۷۱

نیوٹن کا مسئلہ ۱۷۰، ۱۸۵، ۲۰۰، ۲۲۳، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۳
 وتر خاص ۱۶۵، ۱۸۲
 ہم خطی ۴۵، ۸۹، ۳۰۸
 ہم رسم سعتیں ۷۷، ۸۳، ۸۴، ۸۷
 ہم ماسکی مخروطی ۲۴۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۵۲
 ہم محور دائرے ۲۸، ۳۲۳، ۳۳۵
 ہم نقطہ ۴۷
 ہم وضع اشکال ۳۷۹

اصطلاحات علم هندسه نظری

Analytical Geometry	علم هندسه تجلیلی
Anharmonic ratios	غیرالموسیقی نسبتیں
Antiparallel	ضد متوازی
Asymptotes	متقارب
Auxiliary circle	ایمدادی دائرہ
Axis of projection	ظیل کا محور
Bisector	ناصف
Central conics	مرکز دار مخروطی
Centre of curvature	مرکز انحناء
Centre of perspective	منظرہ کا مرکز
Centre of similitude	مرکز مشابہت
Centroid	مرکز ہندسی
Chord	وتر
Circle of curvature	دائرہ انحناء
Circle of similitude	مشابہت کا دائرہ
Circular points	دائری نقطے

Circumcentre	حائط مرکز
Circumcircle	حائط دائرہ
Circumscribe	حائط کرنا
Coaxal	ہم محور
Collinear	ہم خط
Collinearity	ہم خطگی
Concyclic	ہم دائری
Concurrence	ہم نقطگی
Concurrent	ہم نقطہ
Cone	خسروط
Confocal	ہم ماسکی
Confocal conics	ہم ماسکی مخروطی
Conic	خسروطی
Conic sections	مخسروطی تراشیں
Conjugate axes	مزدوج محاور
Conjugate diameters	مزدوج قطر
Conjugate lines	مزدوج خطوط
Conjugate points	مزدوج نقطے
Coplaner	ہم مستوی
Cross-ratios	چلیبہ نسبتیں
Cyclic	دائری
Descriptive Geometry	علم ہندسہ بیانیہ
Diameter	قطر
Direct common tangents	راست مشترک تماس
Directrix	مرتب

Director circle	مرتب دایره
Double contact	دو هراتماس
Double ordinate	دو هرامتسین
Eccentricity	خروج المکز
Ecicle	جانبی دایره
Ecentre	جانبی مرکز
Ellipse	قطع ناقص
Envelope	لغاف
Equi-conjugate diameters	مساوی مزدوج قطر
Equi-cross	هم چلیبه
Focal distance	ماسکئی فاصله
Focus	ماسک
Generating line	مکون
Harmonic mean	موسیقی اوسط
Harmonic ratios	موسیقی نسبتیں
Harmonic section	موسیقی تراش
Homographic	هم رسم
Homothetic	هم وضع
Hyperbola	قطع زائد
Imaginary	خیالی
Incentre	اندرونی مرکز
Incicle	اندرونی دایره
Inverse points	مقلوب نقطه
Inversion	انقلاب
Involution	در پیچ

Involution pencil	در پنج پیکر
Isogonal conjugates	متساوی الزاویه مزدوج
Latus rectum	وتر خاص
Limiting points	انتهائی نقطے
Line at infinity	لاتناہی پر کا خط
Locus	طریق
Mate	زوج
Mean propotional	وسط تناسب
Median	خط وسطی
Nine-point centre	نو نقطی مرکز
Nine-point circle	نو نقطی دائرہ
Non-coplanar	غیر ہم مستوی
Normal	عمود
Ordinate	معدی
Orthocentre	مرکز عمودی
Orthogonal	عمدی القوائم
Orthogonal projection	قائم ظل
Parabola	قطع مخروطی
Pedal line	خط پائیں
Pedal triangle	مثلث پائیں
Pencil	پنسل
Perspective	منظرہ
Point-circles	نقطہ دایرے
Point of intersection	نقطہ تقاطع

Pole	قطب
Polar	قطبی
Projection	ظیل، تطلیل
Quadrangle	چار زاوی
Quadrilateral	چار ضلعی، ذوار یقتہ الاضلاع
Radical axis	بنیادی محور
Range	سعت
Ray	شعاع، کرن
Reciprocal	متکافی
Reciprocation	مکافات
Rectangular hyperbola	قائم زاہد
Rhombus	مربعین
Self-polar	خود قطبی
Semi axes	نیم محاور
Similar	متشابه
Similarly situated	متشابهہا واقع
Sub-normal	زیر عماد
Sub-tangent	زیر مماس
Symmedian	شبیہ وسطی
Symmedian point	شبیہ وسطی نقطہ
Transverse common tangents	قاطع مشترک مماس
Vanishing line	خط منعدم
Vertex	راس